आर्यभट्ट का विश्व–गणित में योगदान

महेन्द्र कुमार शुक्ल
विभागाध्यक्ष, गणित विभाग
शिया पी0जी0 कॉलेज, लखनऊ–226020, उ0प्र0, भारत
dr.mk.shukla.1@gmail.com

प्राप्त तिथि–30.06.2017, स्वीकृत तिथि–18.09.2017

सार– महान वैज्ञानिक आर्यभट्ट का गणितीय विज्ञान के विभिन्न क्षेत्रों यथा खगोल विज्ञान, भौतिक विज्ञान, गणित इत्यादि क्षेत्रों में महत्वपूर्ण योगदान व विशिष्ट स्थान है। आर्यभट्ट ने अपने इस महत्वपूर्ण योगदान को आठ पृष्ठों में व मात्र 108 श्लोकों में निबद्ध किया है। भारत में प्राचीन काल से अंक–गणित तथा बीज–गणित की पद्धति से विविध समीकरणों के प्रश्नों को हल करने की परम्परा रही है। उनमें से वर्ग समीकरण के हल के लिए सर्वप्रथम सूत्र प्रदान करने का श्रेय महान गणितज्ञ आर्यभट्ट को प्राप्त है। आर्यभट्ट वर्ग समीकरण के मूल प्रणेता है।

बीज शब्द– आर्यभट्ट, गणित में योगदान, समान्तर श्रेणी, द्विघातीय समीकरण।

Contribution of Aryabhatta in world Mathematics

Mahendra Kumar Shukla
Head, Department of Mathematics
Shia P.G. College, Khadra, Sitapur Road, Lucknow-226020, U.P., India
dr.mk.shukla.1@gmail.com

Abstract- Great mathematician Aryabhatta has immense contribution not only in mathematics but also in physics, astronomy and other fields. Aryabhatta has initiated to find a solution of quadratics equation, summation of series etc. He has written 108 shlokas in eight pages which play a vital role in mathematics even today.

Key words- Aryabhatta, contribution in Mathematics, arithmetic progression, quadratic equations.

1. **प्रस्तावना**– खगोल–विज्ञान, भौतिक विज्ञान, गणित आदि क्षेत्रों में महान वैज्ञानिक आर्यभट्ट का विश्व में विशिष्ट स्थान है। उन्होंने अपनी इन बहुमूल्य उपलब्धियों को केवल 8 पृष्ठों में समा सकने वाले 108 श्लोकों में संकलित किया है। उनकी इन उपलब्धियों से सम्पूर्ण विश्व के विद्वान लाभान्वित हुए हैं। भारत में प्राचीन काल से अंक–गणित तथा बीज–गणित की पद्धति से विविध समीकरण के प्रश्नों को हल करने की परम्परा रही है। उस समय के ग्रन्थों से इस विधा के निरन्तर प्रसार के संकेत प्राप्त होते हैं। गणित के प्रसिद्ध विद्वान एच0टी0 कोलब्रुक[1] का मानना है कि अरब तथा आधुनिक यूरोप में इस गणित के पहुँचने से पहले यह भारत में बहुत उच्च स्थिति में विद्यमान था।

2. **वर्ग–समीकरण के हल में आर्यभट्ट का योगदान**– वर्ग–समीकरण के हल के लिये सर्वप्रथम सूत्र प्रदान करने का श्रेय महान गणितज्ञ आर्यभट्ट को प्राप्त है। उन्होंने यह सूत्र संकलित–समीकरण के द्वारा विकसित किया है। यह अन्ततः वर्ग–समीकरण में पर्यवसित होता है। इस प्रकार उनका सूत्र वर्ग–समीकरण के एक विशिष्ट उपभेद के लिये उपयोगी है। आगे श्रीधराचार्य[2] ने इनसे प्रेरणा प्राप्त करके इस सूत्र को व्यापक स्वरूप प्रदान किया है, जो कि आधुनिक गणित में प्रचलित है। इसके सूत्र के लिये आर्यभट्ट[3] का श्लोक इस प्रकार है–

गच्छोऽष्टोत्तरगुणितात् द्विगुणाद्युत्तरविशेषवर्गयुतात्।
मूलं द्विगुणाद्यूनं स्वोत्तरभाजितं सरूपार्धम्।।
(आर्यभट्टीय, गणितपाद, श्लोक 20)

अर्थात् चय (d) तथा सर्वधन (s) को 8 से गुणित करके उसमें द्विगुणित आदिधन (a) में से उत्तर (d) को घटा कर प्राप्त विशेष संख्या के वर्ग को जोड़ें। पुनः उस योगफल का वर्गमूल निकालें। इस वर्गमूल से द्विगुणित आदिधन को घटा कर उत्तर (d) से भाग दें। पुनः भजनफल में स्वरूप 1 को जोड़कर प्राप्त योगफल को आधा करने से गच्छ (n) प्राप्त होता है। इससे हमें सूत्र निम्न प्राप्त होता है–

$$\text{गच्छ } (n) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{(2a-d)^2 + 8\,sd} - 2a}{d} + 1\right\}$$

इस प्रसंग में श्रीधराचार्य[4] ने समकक्ष सूत्र के लिये यह श्लोक प्रदान किया है।

अष्टोत्तरहतफलतो द्विगुणादिप्रचयविवरकृतियुक्तात्।
मूलं द्विगुणमुखोनं सचयं द्विचयोद्धृतं गच्छः।।

(त्रिशातिका सूत्र श्लोक 41)

अर्थात् (I) 8 संख्या से गुणित उत्तर (d) तथा उससे गुणित फल या संवर्धन (s) प्राप्त करें, (II) पुनः 2 से गुणित आदिधन (a) में से प्रचय (d) को घटाकर उसका वर्ग करें। (III) इसमें द्विगुणित मुख या आदिधन (s) में से चय (d) को घटाने से प्राप्त संख्या को घटावें। (IV) पश्चात् द्विगुणित चय (d) से भाग दें तो गच्छ (n) प्राप्त होता है। इससे यह समकक्ष सूत्र प्राप्त होता है–

$$\text{गच्छ } (n) = \frac{\sqrt{(2a-d)^2 + 8\,sd} - (2a-d)}{2d}$$

यह सूत्र समान्तर श्रेणी(Arithmetic progression) के संकलित समीकरण में आदिधन(सबसे पहली प्राप्त संख्या a), संवर्धन(कुल प्राप्त संख्या s), उत्तर या चय(क्रमशः निश्चित अन्तर में प्राप्त संख्या– Common difference [d]) के परिज्ञात होने पर गच्छा पद (number) के परिज्ञान का उपाय बताता है। यहाँ श्रीधर[5] के एक श्लोक के आधार पर उदाहरण इस प्रकार है–

प्रथम दिन घोड़े को 20 हरड़ दी गई। उसके पश्चात् क्रमशः 5–5 हरड़ बढ़ा कर देते हुए कुल 245 हरड़ कितने दिन में प्रदान की गई।

यहाँ आदिधन a=20, चय d=5, सर्वधन s=245 है। यहाँ दिनों की संख्या (n) का परिज्ञान करना है। आर्यभट्ट ने अन्य प्रसंग में सर्वधन (s) का सूत्र प्रदान किया है। उसके आधार पर संकलित का यह समीकरण प्राप्त करते हैं–

$$\text{समीकरण} \Rightarrow \frac{n}{2}\{2a + (n-1)\,d\} = s$$

$$\text{उदाहरण} \Rightarrow \frac{n}{2}\{40 + (n-1)\,5\} = 245$$

यहाँ a, d, s, अचर संख्याएँ हैं। केवल n चर संख्या होने से उसका परिज्ञान करना है। इसे सरल करने पर हम यह वर्ग–समीकरण प्राप्त करते हैं–

$$\Rightarrow \quad dn^2 + (2a-d)\,n = 2s \quad \Rightarrow \quad 5n^2 + 35n = 490$$

इससे सिद्ध है कि आर्यभट्ट का संकलित–समीकरण अन्ततः वर्ग–समीकरण में परिवर्तित होता है। इस पर समीकरण के सामान्य नियमों से प्राप्त संक्रियाओं से आर्यभट्ट का n ज्ञात करने का सूत्र विकसित होता है। यहाँ आर्यभट्ट की संक्रियाओं को समीकरण के नियमों के अनुरूप सिद्ध करते हैं–

श्लोक की (I) संक्रिया या दोनों पक्षों की 4d से गुणित करने पर–

$$\Rightarrow \quad 4n^2d^2 + 8and - 4nd^2 = 8sd$$
$$100^2 + 800n - 100n = 9800$$

(II) संक्रिया या पूर्ण वर्ग का रूप देने पर–

$$\Rightarrow \quad (2nd + 2a - d)^2 = 8sd + (2a-d)^2$$
$$\Rightarrow \quad (10\,n + 35)^2 = 9800 + 35^2 = 11025$$

क्योंकि प्रथम पक्ष पूर्ण वर्ग है, अतः द्वितीय भी पूर्ण वर्ग है। अतः (III) संक्रिया करने पर–

$$\Rightarrow \quad 2nd + 2a - d = \sqrt{8sd + (2a-d)^2}$$
$$\Rightarrow \quad 10n = \sqrt{9800 + 35^2} = 105$$

समीकरण के नियमानुसार (IV) संक्रिया करने पर–

$$\Rightarrow \quad 2nd = \sqrt{8sd + (2a-d)^2} - (2a-d)$$

$$\Rightarrow \quad 10n = \sqrt{9800 + 35^2 - 35}$$

पक्षान्तरण करने या (V) संक्रिया करने पर –

$$n = \frac{\sqrt{8sd + (2a-d)^2} - (2a-d)}{2d}$$

$$n = \frac{70}{10} = 7$$

इस प्रकार आर्यभट्ट के सूत्र को समीकरण के सामान्य नियमों से उपपत्तिपूर्वक प्राप्त कर लिया गया है। इसके साथ ही आर्यभट्ट ने दो अज्ञात संख्याओं के व्यवकलन–फल तथा उनके गुणन–फल के आधार पर उन अज्ञात राशियों का पता लगाने के लिये जो सूत्र प्राप्त किया है, वह भी अन्ततः वर्ग–समीकरण द्वारा विकसित है। उनका श्लोक इस प्रकार है[6]–

द्विकृतिगुणात् संवर्णात् द्वयन्तरवर्गेण संयुतान्मूलम्।
अन्तरयुक्तं हीनं तद् गुणकारद्वयं दलितम्।।

–आर्यभट्टीय, गणितपाद श्लोक 24

अर्थात् 2 का वर्ग अर्थात् 4 से गुणित दो राशियों (x, y) के गुणनफल को उन्हीं दो अज्ञात राशियों के अन्तर या व्यवकलन–फल के वर्ग के साथ जोड़ें। पुनः उनका वर्गमूल लें। इसमें इन राशियों के अन्तर को जोड़े या घटायें। पुनः प्राप्त राशि को दो से दलित या विभाजित करने पर उक्त अज्ञात राशियाँ प्राप्त होती हैं।

इससे यह सूत्र प्राप्त होता है–

$$\frac{\sqrt{(x-y)^2 + 4xy} \pm (x-y)}{2} = x \text{ या } y$$

यहाँ श्लोक में उल्लिखित ज्ञात तथा अज्ञात राशि के वर्णन के लिये उदाहरण के साथ संक्रमण का समीकरण प्राप्त करते हैं–

$x - y = b$, उदा. $b = 25$
$xy = c$, उदा. $c = 2394$

इस पर समीकरण की संक्रियाओं से वर्ग–समीकरण का आकार प्राप्त करते हैं–

$x^2 - bx = c$ उदा. $x^2 - 25x = 2394$
$x^2 \pm bx = c$ उदा. $y^2 \pm 25y = 2394$

श्लोक में प्रयुक्त संक्रियाओं से यह सूत्र प्राप्त करते हैं–

$$\frac{\sqrt{(b^2 + 4c} \pm b}{2} = x \text{ या } y$$

$$\frac{\sqrt{(25^2 + 4 \text{ x } 2394} \pm 25}{2} = 63 \text{ या } 38$$

इस सूत्र में b के मान में x - y को तथा c के मान में xy को प्रतिस्थापित करने पर आर्यभट्ट का पूर्वोक्त सूत्र प्राप्त कर लेते हैं। इस प्रकार यह सूत्र भी वर्ग–समीकरण का एक उपभेद सिद्ध होता है। अन्य आचार्यों ने अलग–अलग प्रकार के संकलित–समीकरणों के आधार पर अलग–अलग सूत्र विकसित किये हैं। वे सभी अन्ततः वर्ग–समीकरण में ही पर्यवसित होने से व्यापक सूत्र के उपभेद सिद्ध होते हैं। जैसे त्रिशतिकाकार ने एक सूत्र प्रस्तुत किया है–

1 + 2 + 3 .... के संकलित पद (n) = $\frac{\sqrt{8s+1} - 1}{2}$

इसकी उपपत्ति के लिये इसके संकलित का सूत्र प्राप्त करते हैं–

1 + 2 + 3 .... + अन्तिम पद का संकलित (s) = $\frac{n(n+1)}{2}$

इसका वर्ग–समीकरण का आकार $\Rightarrow$ $n^2 + n = 2s$

इस वर्ग–समीकरण को प्राप्त करने के पश्चात् दोनों पक्षों में 4a को गुणित करके पिछले क्रम से वर्ग–समीकरण के सामान्य सूत्र द्वारा त्रिशतिका के उक्त सूत्र को प्राप्त कर सकते हैं। श्रीधराचार्य ने वर्ग–समीकरण के छोटे–छोटे सूत्रों को प्रस्तुत करने के पश्चात् व्यापक सूत्र भी प्रदान किया है, जो आधुनिक गणित में भी प्रचलित है। उनका यह सूत्र उनके उपलब्ध ग्रन्थों में प्राप्त नहीं होता। पर भास्कराचार्य ने स्पष्ट रूप से उनका नाम लेकर यह श्लोक उद्धृत किया है[7]–

चतुराहतवर्गसमै रूपैः पक्षद्वयं गुणयेत्।
अव्यक्तवर्गरूपैर्युक्तौ पक्षौ ततो मूलम्।।

(भास्करीय बीजगणित में उद्धृत श्लोक)

3. **निष्कर्ष**– वर्ग समीकरण का यह व्यापक बहुमूल्य सूत्र निश्चय ही उनके किसी विलुप्त ग्रन्थ में विरचित किया गया था। आगे चल कर महावीराचार्य आदि ने 'शेष मूल जाति' इत्यादि उपभेदों के अन्तर्गत अनेक संक्षिप्त सूत्र विकसित किये थे। उनके सभी समीकरण इस वर्ग–समीकरण में अन्तर्भूत होने से इस व्यापक सूत्र से समाहित हो सकते हैं। भारतीय गणित में ऐसे प्रश्नों को अंकगणितीय विधि से भी हल करने की परम्परा रही है। आर्यभटीय के भाष्यकार नीलकण्ठ सोमसुत्वन् ने आर्यभट्ट के सूत्र रेखागणितीय उपपत्ति भी प्रदान की है। इससे प्रकट है कि आर्यभट वर्ग–समीकरण के सूत्र के मूल प्रणेता तथा श्रीधर उसके प्रतिष्ठापक आचार्य रहे हैं।

संदर्भ

1. कोलब्रुक, एच0 टी0(2005) क्लासिक्स ऑफ इण्डियन मैथेमेटिक्स, शारदा प्रकाशन।
2. श्रीधराचार्य की जीवनी, https://achhigyan.com/sridharacharya-biography
3. आर्यभट्टीय, गणितपाद, श्लोक 20।
4. श्रीधराचार्य, त्रिशातिका सूत्र श्लोक 41।
5. श्रीधराचार्य की जीवनी, https://achhigyan.com/sridharacharya-biography
6. आर्यभट्टीय, गणितपाद, श्लोक 24।
7. भास्कराचार्य द्वितीय–बीजगणित श्लोक।