खण्ड-6, अंक-1, वर्ष-2018, मु0पृ0 35-39, D.O.I. : 10.22445/avsp.v6i1.13894 शोध पत्र

द्विपक्षीय बेसिक हाईपरज्योमेट्रिक श्रेणी–एक अध्ययन

आदित्य अग्निहोत्री
प्रवक्ता व विभागाध्यक्ष, गणित विभाग
एमा थॉमसन स्कूल, लखनऊ–226001, उ0प्र0, भारत
aditya_agnihotri20@rediffmail.com

प्राप्त तिथि–08.09.2018, स्वीकृत तिथि–08.10.2018

सार– प्रस्तुत शोध में द्विपक्षीय बेसिक हाईपरज्योमेट्रिक श्रेणी के परिवर्तनों और योग सूत्रों के बारे में बताया गया है। साथ ही उनके नये परिवर्तनों और योग सूत्रों को स्थापित करने की विधि पर अध्ययन किया गया है तथा इनकी उपयोगिता को भी प्रदर्शित किया गया है।

बीज शब्द– हाईपर–ज्योमेट्रिक श्रेणी, द्विपक्षीय बुनियादी हाईपर– ज्योमेट्रिक श्रेणी, रामानुजन योग सूत्र।

Bilateral Basic Hypergeometric Series: A Study

Aditya Agnihotri
Head, Department of Mathematics
Emma Thompson School, Lucknow – 226001, U.P., India
aditya_agnihotri20@rediffmail.com

Abstract- In the present work, certain transformations and summation formulae for basic bilateral hypergeometric series have been discussed. This study also gives the method of obtaining new transformations and summation formulae for basic bilateral hypergeometric series. Some of the applications have been mentioned.

Key words- Hypergeometric series, bilateral basic hypergeometric series, Ramanujan's summation formula.

1. **प्रस्तावना**– रामानुजन का प्रसिद्ध ${}_1\varphi_1$ योग सूत्र उनकी नोटबुक[8] में इस प्रकार प्रदर्शित है–

$$ {}_1\varphi_1(a;b;q;z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} z^n = \frac{(q,\frac{b}{a},az,\frac{q}{az})_\infty}{(b,\frac{q}{a},z,\frac{b}{az})_\infty} \qquad \text{.....(1.1)} $$

जहाँ $\left|\frac{b}{a}\right| < |z| < 1$

समी0 (1.1) q–द्विपद प्रमेय का द्विपक्षीय व्यापकीकरण है और इसकी खोज रामानुजन ने की। रामानुजन के इस सूत्र का बेसिक हाईपर–ज्योमेट्रिक थ्योरी में बहुत ही महत्वपूर्ण स्थान है। रामानुजन के इस सूत्र का अध्ययन वार्नर[10] ने विस्तार से किया है।

प्रस्तुत शोध में निम्नलिखित अंकन और परिभाषाओं का उपयोग किया गया है।[6] सामान्यीकृत बेसिक हाइपरज्योमेट्रिक श्रेणी इस प्रकार है–

$$ {}_{r+1}\emptyset_r\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots\dots a_{r+1} \ ; \ q \ ; \ z \\ b_1, b_2, \dots\dots b_r \end{matrix}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots\dots (a_{r+1})_n}{(q)_n (b_1)_n (b_2)_n \dots\dots (b_r)_n} z^n $$

जहाँ $|z| < 1$, $|q| < 1$.

द्विपक्षीय बेसिक हाईपर–ज्योमेट्रिक श्रेणी इस प्रकार है–

$$ {}_r\varphi_r\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots\ldots a_r \; ; \; q \; ; \; z \\ b_1, b_2, \ldots\ldots b_r \end{matrix}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \ldots\ldots (a_r)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \ldots\ldots (b_r)_n} z^n $$

जहाँ $\left|\frac{b_1, b_2, \ldots\ldots b_r}{a_1, a_2, \ldots\ldots a_r}\right| < |z| < 1 \; ; \; |q| < 1$ तथा

$$ (a; q^k)_n = (1-a)(1-aq^k)(1-aq^{2k}) \ldots\ldots (1-aq^{k(n-1)}) $$

$k = 1$ के लिए

$$ (a;q)_n = (a)_n $$

तथा $$ (a)_\infty = (a;q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty}(1-aq^n) $$

प्रस्तुत शोध में निम्नलिखित सूत्रों का प्रयोग किया गया है।[6]

$$ (a)_n = \frac{(a)_\infty}{(aq^n)_\infty} \qquad \ldots\ldots(1.2) $$

$$ \left({}^{q}/_{a}\right)_n = (-a)^{-n} q^{n(n+1)/2} \frac{(q^{-n}a)_\infty}{(a)_\infty} \qquad \ldots\ldots(1.3) $$

तथा

${}_2\varphi_2$ द्विपक्षीय बेसिक हाईपरज्योमेट्रिक श्रेणी का योग सूत्र[9]

$$ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a)_n (bc/azq)_n}{(b)_n (c)_n} z^n = \frac{(az)_\infty (q)_\infty (q/az)_\infty (b/a)_\infty (c/a)_\infty (bc/azq)_\infty}{(z)_\infty (b)_\infty (c)_\infty (b/az)_\infty (c/az)_\infty (q/a)_\infty} \qquad \ldots\ldots(1.4) $$

2. **q–अंतर ऑपरेटर**– चेनऔर लिऊ[5] ने ऑपरेटर θ को इस प्रकार दिया

$$ \theta = \delta^{-1} Dq $$

जहाँ δ एक q–शिफ्टेड ऑपरेटर है तथा

$$ \delta\{f(a)\} = f(aq) $$

$$ Dq\, f(a) = \frac{f(a) - f(aq)}{a} $$

उपरोक्त ऑपरेटर के द्वारा उन्होने परिभाषित किया[5]

$$ T(b\, Dq) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b\, Dq)^n}{(q;q)_n} $$

तथा $$ E(b\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b\,\theta)^k q^{k(k-1)/2}}{(q;q)_k} $$

यह ऑपरेटर निम्नलिखित पहचान सूत्र को संतुष्ट करते हैं–

$$T(b\,Dq)\frac{1}{(at)_\infty}=\frac{1}{(at,\ bt)_\infty} \qquad \text{.......(2.1)}$$

$$T(b\,Dq)\frac{1}{(as,\ at)_\infty}=\frac{(abst)_\infty}{(as,\ at,\ bs,\ bt)_\infty} \qquad \text{.......(2.2)}$$

$$E(b\theta)(at;q)_\infty=(at,\ bt)_\infty \qquad \text{.......(2.3)}$$

$$E(b\theta)(as,at;q)_\infty=\frac{(as,\ at,\ bs,\ bt)_\infty}{(abst/q)_\infty} \qquad \text{.......(2.4)}$$

3. **परिवर्तन तथा योग सूत्र**– रामानुजन का ${}_1\varphi_1$ योगसूत्र (1.1) का बेसिक हाईपर–ज्योमेट्रिक थ्योरी में बहुत ही महत्वपूर्ण स्थान है। रामानुजन के इस सूत्र के परिवर्तनों को पिछले कुछ वर्षों के शोध कार्य में ज्ञात किया गया है। इस सूत्र के प्रमुख परिवर्तनों को यहाँ दिया जा रहा है।[1, 2]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}z^n=-1+\frac{(q,az)_\infty}{(b,z)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b/q)_n(z)_n}{(q)_n(az)_n}q^n+\frac{(q/z)_\infty}{(b/az)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/a)_n(b/a)_n}{(q)_n(q/a)_n}(q/z)^n \qquad \text{.......(3.1)}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}z^n=-1+\frac{(qaz/b)_\infty}{(z)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b/q)_n(b/a)_n}{(q)_n(b)_n}(qaz/b)^n+\frac{(q/b,qb/az)_\infty}{(q/a,b/az)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b/a)_n(b/a\,z)_n}{(q)_n(bq/az)_n}(q/b)^n \qquad \text{.......(3.2)}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}z^n=-1+\frac{(q,az)_\infty}{(b,z)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b/q)_n(z)_n}{(q)_n(az)_n}(q)^n+\frac{(q/b,qb/az)_\infty}{(q/a,b/az)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b/a)_n(b/az)_n}{(q)_n(qb/az)_n}(q/b)^n \qquad \text{.......(3.3)}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}z^n=-1+\frac{(b/a,az)_\infty}{(b,z)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(qza/b)_n(a)_n}{(q)_n(az)_n}\left(\frac{b}{a}\right)^n+\frac{(q/z)_\infty}{(b/az)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/a)_n(b/a)_n}{(q)_n(q/a)_n}(q/z)^n \qquad \text{.......(3.4)}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}z^n=-1+\frac{(qaz/b)_\infty}{(z)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b/q)_n(b/a)_n}{(q)_n(b)_n}(qaz/b)^n+\frac{(q/z)_\infty}{(b/az)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/a)_n(b/a)_n}{(q)_n(q/a)_n}(q/z)^n \qquad \text{.......(3.5)}$$

उपरोक्त ${}_1\varphi_1$के परिवर्तनोंसे ${}_2\varphi_2$के परिवर्तनों को इस प्रकार प्राप्त किया जा सकता है–

रामानुजन योग सूत्र (1.1) को (3.1) में रखने पर

$$\frac{(az)_\infty(q)_\infty(q/az)_\infty(b/a)_\infty}{(z)_\infty(q/a)_\infty} = -\{(b)_\infty(b/az)_\infty\} + \frac{(q)_\infty(az)_\infty}{(z)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z)_n q^n\{(b/az)_\infty(b/q)_\infty\}}{(q)_n(az)_n(bq^{n-1})_\infty}$$

$$+ (q/z)_\infty\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/a)_n(q/z)^n}{(q)_n(q/a)_n(bq^n/a)_n}\{(b)_\infty(b/a)_\infty\}$$

दोनों तरफ b के सापेक्ष $E(c\theta)$ लेने पर तथा (2.3), (2.4) का उपयोग करने पर

$$\frac{(az)_\infty(q)_\infty(q/az)_\infty(b/a)_\infty(c/a)_\infty}{(z)_\infty(q/a)_\infty} = -\frac{(b)_\infty(b/az)_\infty(c)_\infty(c/az)_\infty}{(bc/azq)_\infty}$$
$$+\frac{(q)_\infty(az)_\infty}{(z)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z)_n q^n}{(q)_n(az)_n(bq^{n-1})_\infty}\left\{\frac{(b/az)_\infty(b/q)_\infty(c/az)_\infty(c/q)_\infty}{(bc/azq^2)_\infty}\right\}$$
$$+\ (q/z)_\infty\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/a)_n(q/z)^n}{(q)_n(q/a)_n(bq^n/a)_\infty}\left\{\frac{(b)_\infty(b/a)_\infty(c)_\infty(c/a)_\infty}{(bc/aq)_\infty}\right\}$$

उपरोक्त को $\frac{(bc/azq)_\infty}{(b,b/az,c,c/az)_\infty}$ से गुणा करने पर तथा (1.4) का उपयोग करने पर

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n(bc/azq)_n}{(b)_n(c)_n}z^n = -1 + \frac{(bc/azq,c/q,q,az)_\infty}{(b,c,z,bc/azq^2)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z)_n(b/q)_n}{(q)_n(az)_n}q^n + \frac{(q/z,c/a,bc/azq)_\infty}{(bc/aq,bc/az,c/az)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/a)_n(b/a)_n}{(q)_n(q/a)_n}(q/z)^n \quad \text{.....(3.6)}$$

उपरोक्त ${}_2\varphi_2$ परिवर्तन (3.6), परिवर्तन (3.1) से प्राप्त किया गया है। इसी प्रकार अन्य ${}_1\varphi_1$ के परिवर्तनों से ${}_2\varphi_2$ के अन्य परिवर्तन ज्ञात किये जा सकते है।[3, 4]

द्विपक्षीय बेसिक हाईपरज्योमेट्रिक श्रेणी के ज्ञात योग सूत्र से नवीन योग सूत्र का निर्माण किया जा सकता है। योग सूत्र (1.4) को इस प्रकार लिखा जा सकता है–

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(bc/azq)_n}{(b)_n(c)_n}z^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q/b)_n(q/c)_n}{(q/a)_n(q^2az/bc)_n}q^n = \frac{(az)_\infty(q)_\infty(q/az)_\infty(b/a)_\infty(c/a)_\infty(bc/azq)_\infty}{(z)_\infty(b)_\infty(c)_\infty(b/az)_\infty(c/az)_\infty(q/a)_\infty}$$

समीकरण (1.2) तथा (1.3) की सहायता से–

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(bc/aqz)_n}{(c)_n}z^n\{(bq^n)_\infty(b/az)_\infty\} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q/c)_n(b)_\infty(-1)^n q^{n(n+1)}(q/b)^n}{(q/a)_n(q^2az/bc)_n}\{(bq^{-n})_\infty(b/az)_\infty\} = \frac{(az)_\infty(q)_\infty(q/az)_\infty(b/a)_\infty(c/a)_\infty(bc/azq)_\infty}{(z)_\infty(c)_\infty(c/az)_\infty(q/a)_\infty}$$

ऑपरेटर $E(c\theta)$ लेने तथा (2.3) व (2.4) का उपयोग करने पर

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n(bc/azq)_n(bd/azq)_n}{(b)_n(c)_n(d)_n}z^n = \frac{(az)_\infty(q)_\infty(q/az)_\infty(b/a)_\infty(c/a)_\infty(bc/azq)_\infty(dc/azq)_\infty(d/a)_\infty(bd/azq)_\infty}{(z)_\infty(b)_\infty(c)_\infty(d)_\infty(b/az)_\infty(c/az)_\infty(q/a)_\infty(bcd/a^2zq^2)_\infty(d/az)_\infty} \quad \text{.......................................(3.7)}$$

उपरोक्त ${}_3\varphi_3$योग सूत्र (3.7), योग सूत्र (1.4) से प्राप्त हुआ है। इस प्रकार अन्य ज्ञात योग सूत्रों से नये योग सूत्रों को स्थापित किया जा सकता है।

4. **निष्कर्ष**– उपरोक्त परिवर्तनों व योग सूत्रों के अध्ययन से स्पष्ट है कि द्विपक्षीय बेसिक हाईपर–ज्योमेट्रिक श्रेणी के ज्ञात परिवर्तनों व योग सूत्रों से नये परिवर्तन व योग सूत्र स्थापित किये जा सकते हैं। इन योग सूत्र व परिवर्तनों से नये q–बीटा, q-गामा व ईटा फलनों को भी ज्ञात किया गया है[1,3], व इनसे और नये फलनों को भी ज्ञात किया जा सकता है। द्विपक्षीय बेसिक हाईपरज्योमेट्रिक श्रेणी के योग सूत्रों से विभिन्न परिवर्तनों को प्राप्त करने एवं उस पर शोध कार्य किये जाने की आवश्यकता है और इन योग सूत्रों व परिवर्तनों का उपयोग गणित एवं विज्ञान की अन्य शाखाओं में भी किये जाने की आवश्यकता है।

संदर्भ

1. अली, एस0 अहमद एवं अग्निहोत्री, आदित्य(2016) ऑन एप्लीकेशन्स् ऑफ रामानुजनस् सम, जर्नल ऑफ मैथ एण्ड कम्प्युटेशनल सांइस, खण्ड–6, अंक–02, मु0पृ0 156–164।
2. अग्निहोत्री, आदित्य(2017) गणित के लिए रामानुजनका योगदान, अनुसंधान विज्ञान शोध पत्रिका, खण्ड–5, अंक–1, मु0पृ0 154–156।
3. अग्निहोत्री, आदित्य(2017) अ स्टडी ऑफ सर्टन ट्रान्सफॉर्मेशन्स् एण्ड समेशन्स् ऑफ बेसिक हाइपरज्योमेट्रिक फंक्शन्स् विद एप्लिकेशन्स्(पी–एच0डी0 थीसिस), बाबू बनारसी दास विश्वविद्यालय, लखनऊ, shodhganga.inflibnet.ac.in
4. अली, एस0 अहमद एवं अग्निहोत्री, आदित्य(2018) ऑन सम ट्रान्सफार्मेशन्स् ऑफ अ ${}_2\varphi_2$ समेशन फॉर्मूला एण्ड देयर एप्लिकेशन्स्, टू अपीयर, ज0 एप्लाइड मैथेमेटिक्स एण्ड कम्प्यूटेशन, खण्ड–2, अंक–10।
5. चेन, डब्लू0 वाई0 सी0 एवं लिऊ, जेड0 जी0(1997) पेरामीटर ऑगमेन्टेशन फॉर बेसिक हाइपरज्योमेट्रिक सीरिज, II, जर्नल काम्बि0 थ्योरी सीरिज ए–80, मु0पृ0 175–195।
6. जी0, गैस्पर एवं रहमान, एम0(2004) बेसिक हाइपर–ज्योमेट्रिक सीरिज, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, कैम्ब्रिज।
7. हार्डी, जी0 एच0(1940) रामानुजन, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, ए0एम0एस0, चेल्सी पब्लिकेशन्स्, लन्दन।
8. रामानुजन, एस0(1957) नोटबुक्स, टाटा इन्स्टीट्यूट ऑफ फण्डामेंटल रिसर्च, मुम्बई।
9. सोमाशेकर, डी0 डी0; नरसिम्हा, के0 मूर्ति एवं शालिनी, एस0 एल0(2011) आन् अ न्यूसमेशन फॉर्मूला फॉर ${}_2\varphi_2$ बेसिक बाइलेट्रल हाइपरज्योमेट्रिक जर्नल ऑफ मैथ एण्ड मैथमेटिकल सांइसेज।
10. वार्नर, ए0 ओ0(2013) रामानुजन्स ${}_1\varphi_1$ समेशन्स् नोटिसेस ऑफ द ए0एम0एस0, खण्ड–60, नं0–1, मु0पृ0 18–22।