D.O.I.: 10.22445/avsp.v8i1.6

गणितीय अवधारणाओं की काव्यात्मक प्रस्तुति

महेन्द्र पाठक

सहायक निदेशक (कार्यक्रम)
आकाशवाणी, लखनऊ–226 001, उ.प्र., भारत

प्राप्ति तिथि–07.08.2020, स्वीकृति तिथि–20.10.2020

सार– भारतीय गणितज्ञों की संस्कृत पद्यरचनाओं की भाँति ही क्षेत्रीय बोलियों और उर्दू में भी अनेक छंदबद्ध गणितीय अवधारणाएँ पाई जाती हैं। ऐसी ही कुछ गणितीय अवधारणाओं की काव्यात्मक प्रस्तुति के उदाहरण. यहाँ समाहित किए गए हैं।

बीज शब्द– आर्यभटीयं, लीलावती, त्रिशतिका

Poetic Presentation of Mathematical Concepts

Mahendra Pathak

Assistant Director (Programme)
All India Radio, Lucknow-226 001, U.P., India

Abstract- Following Ancient Indian Mathematicians idea of expressing their mathematical concepts in Sanskrit verse, various metrical forms are found in vernacular languages and Urdu also. Such poetic presentations of mathematical concepts have been illustrated here.

Key words- Aryabhatiyam, Lilavati, Trishatika

1. परिचय

अपनी व्यापक लोकप्रियता के कारण आदिकाल से ही कविता का मानव जीवन से गहरा सम्बन्ध रहा है। बच्चों से लेकर बड़ों तक कविता सुनने–पढ़ने की प्रवृत्ति सदा से ही व्यसन के स्तर तक पहुँची हुई रही है। इसका मूल कारण यह है कि गद्य की तुलना में पद्य आसानी से याद हो जाता है, क्योंकि यह सरस होता है। मनोरंजक पद्धति से व्यक्ति का ज्ञानवर्धन एवं पथप्रदर्शन करने वाली शिक्षा अधिक लोकप्रिय एवं ग्राह्य होती है। जीवन के व्यावहारिक पक्ष को उजागर करने वाली कविता इसीलिए चिरजीवी और शाश्वत होती है। कविता और अन्य ललित कलाओं की भाँति गणित भी मानव संधान की उपज है। इसी तथ्य को ध्यान में रखते हुए प्राचीन भारतीय गणितज्ञों ने अपने अधिकतर ग्रंथ काव्य रूप में प्रस्तुत किये। भारतीय बीजगणित का प्रारंभिक एवं आद्य स्वरूप यद्यपि शुल्व सूत्रों और बक्षाली की पाण्डुलिपि में दृष्टिगोचर होता है, किन्तु एक स्वतंत्र शाखा के रूप में बीजगणित का विकास आर्यभट्ट (476–550 ई0) के समय से ही प्रारम्भ हुआ है। इसी कारण आर्यभट्ट (आर्यभट्ट–1) को भारत में बीजगणित के स्थापक के रूप में जाना जाता है। कहा जाता है कि आर्यभट्ट ने तीन ग्रंथों की रचना की, किन्तु दुर्भाग्य है कि आज उनकी केवल एक कृति आर्यभटीयं ही उपलब्ध है। उनकी यह एक कृति ही इतनी भव्य एवं मनोरम है कि इसके कारण उनका नाम भारतीय गणित और खगोल विज्ञान के इतिहास में अमर है।[1–6]

2. शोध सामग्री

सर्वप्रथम हम प्राचीन भारतीय गणितज्ञों की संकल्पनाओं और निष्कर्षों पर दृष्टि डालते हैं। आर्यभट्ट संभवतः पहले गणितज्ञ हैं जिन्होंने एक समानान्तर श्रेणी (Arithmetical Series) में कहीं से भी लिए गये किन्हीं वांछित पदों के योग हेतु आर्यभटीयं के दूसरे अध्याय अर्थात् गणितपाद के 19वें श्लोक[7] में यह सूत्र दिया है–

Corresponding Author: drpathak@gmail.com

इश्टं व्येकं दलितं सपूर्वमुत्तरगुणं समुखमध्यम्।
इश्टगुणितमिश्टधनं त्वथवाऽऽद्यन्तं पदार्धहतम्।।

अर्थात् श्रेणी के वांछित पदों की संख्या में से 01 घटाकर शेष को सार्वअन्तर (Common Difference) से गुणा करें। गुणनफल में प्रथम पद जोड़ने से अन्तिम पद प्राप्त होगा। अन्तिम पद और प्रथम पद को जोड़कर आधा करने से मध्यधन प्राप्त होगा। मध्यधन को पदों की संख्या से गुणा करने पर श्रेणी के कुल पदों का योग (इष्टधन) प्राप्त होगा। यदि किसी श्रेणी में प्रथम पद a हो, सार्वअन्तर d हो, पदों की संख्या n हो और अन्तिम पद L हो तो, उक्त श्लोक के अनुसार, पदों का कुल योग

$$S = n[a+L]/2 \text{ या } n[2a+(n-1)d]/2$$

जो कि आधुनिक गणित के सूत्रों से भी प्राप्त होता है। यहाँ यह तथ्य ध्यान देने योग्य है कि मध्यधन का अस्तित्व मध्य पद पर आश्रित नहीं है। यदि श्रेणी के पदों की संख्या विषम हो तो मध्य पद और मध्यधन एक ही होंगे। परन्तु यदि पदों की संख्या सम हो तो श्रेणी में कोई मध्य पद नहीं होगा। उदाहरणार्थ यदि श्रेणी में कुल 22 पद (सम संख्या) हों तो श्रेणी के 10वें और 11वें पदों का मध्यमान (Mean) इस श्रेणी का मध्यधन होगा। गणितपाद के 24वें श्लोक[7] के माध्यम से महान गणितज्ञ आर्यभट्ट ने युगपत समीकरणों (Simultaneous Equations) का भी हल दिया है। गणितपाद के 25वें श्लोक[7] में वर्ग समीकरण(द्विघातीय समीकरण) को हल करने की विधि ब्याज की दर के प्रसंग में भी दी गई है। उनका यह कार्य भारत में बीजगणित की नींव रखने जैसा ही है। आर्यभट्ट गणित एवं खगोल विज्ञान के उद्भट विद्वान थे। उन्होंने परम्परागत ज्ञान को लिपिबद्ध कर न केवल व्यवस्थित किया, वरन् उसमें यथायोग्य संशोधन कर नए व मौलिक निष्कर्ष भी निकाले। पृथ्वी अपने अक्ष पर पूर्व से पश्चिम की ओर घूमती है, आर्यभटीयं के चौथे अध्याय अर्थात् गोलपाद[7] में यह आर्यभट्ट का क्रांतिकारी प्रतिपादन था। इसी अध्याय के 37वें श्लोक में **"छादयति शशी सूर्यं शशिनं महती च भूच्छाया"**[7] कह कर आर्यभट्ट ने सूर्यग्रहण एवं चन्द्रग्रहण के सम्बन्ध में प्रचलित राहु–केतु की मान्यताओं को नकार दिया और इस संदर्भ में समुचित गणितीय व्याख्या प्रस्तुत की। आर्यभट्ट द्वारा पृथ्वी के भ्रमण सिद्धान्त तथा ग्रहण की व्याख्या को परवर्ती अनेक ज्योतिषविदों ने धर्म शास्त्रों के विरुद्ध बता कर उनकी निंदा की।

यहाँ यह तथ्य विशेष रूप से उल्लेखनीय है कि आर्यभट्ट के निधन के लगभग ग्यारह सौ वर्षों बाद आर्यभट्ट द्वारा प्रतिपादित सत्य को ही दोहराने पर जहाँ गैलीलियो को रोमन कैथोलिक चर्च की धर्मसभा द्वारा मृत्युपर्यन्त बन्दी जीवन बिताने की कठोर यातना दी गई, वहीं भारत में आर्यभट्ट के प्रति धर्मगुरुओं का ऐसा विरोध कभी नहीं रहा। इस तथ्य को भी पाठ्य पुस्तकों में सम्मिलित कर प्रकाश में लाना चाहिए।

वृत्त की परिधि का व्यास से अनुपात अचर है, जिसके लिए 1706 ई. में सर्वप्रथम वेल्श गणितज्ञ विलियम जोन्स ने ग्रीक वर्ण π का प्रयोग किया था और आगे चलकर सुप्रसिद्ध गणितज्ञ ऑयलर के कारण 1737 ई. से यह संकेताक्षर लोकप्रिय हुआ। आर्यभट्ट ने गणितपाद के 10वें श्लोक[7] में अपने पूर्ववर्ती गणितज्ञों की तुलना में π का अधिक सटीक और सही नाम दिया, उसको भी वह आसन्न मान (एप्रॉक्सिमेट वैल्यू) कहते हैं–

चतुरधिकं शतमष्टगुणं द्वाषष्टिस्तथा सहस्राणाम्।
अयुतद्वय विष्कम्भस्यासन्नो वृत्तपरिणाहः ।।
(अयुत = दस सहस्र,दस हज़ार, विष्कम्भ = व्यास, परिणाह = परिधि)

अर्थात् जिस वृत्त का व्यास अयुतद्वय अर्थात् 20,000 हो, उसकी परिधि का आसन्न मान [(100+4) 8+62,000] अर्थात् 62,832 होगा। इसलिए $\pi = 62{,}832 / 20{,}000 = 3.1416$

यह π का पूर्ण नहीं बल्कि 'आसन्न' मान है। इस प्रकार आर्यभट्ट π की अपरिमेयता (Irrationality) और इसका बीजातीत (Transcendental) होना भी सिद्ध करते हैं। आर्यभट्ट के परवर्ती गणितज्ञों द्वारा दिये π के सूक्ष्मतर मानों (क्लोजर रैशनल एप्रॉक्सिमेशन) के संदर्भ में आवश्यक जानकारी[9] में उपलब्ध है।

आर्यभट्ट के पश्चात् ब्रह्मगुप्त, महावीराचार्य, श्रीधराचार्य और भास्कराचार्य जैसे अनेक गणितज्ञ हमारे देश में जन्मे और उन्होंने भी गणितीय प्रश्नों की काव्यात्मक प्रस्तुतियाँ कीं। ब्रह्मगुप्त (598–668 ई0) एक महान गणितज्ञ और ज्योतिषविद थे। अलबरूनी ने अपने वृतान्त[3] में स्थान–स्थान पर ब्रह्मगुप्त की भूरि–भूरि प्रशंसा की है। उनकी दो कृतियाँ ब्राह्म–स्फुट सिद्धान्त और खण्ड–खाद्यक हैं। ब्राह्म–स्फुट सिद्धान्त[8] के कुल इक्कीस अध्यायों में से मात्र दो अध्याय (12वें और 18वें) गणित के हैं, शेष ज्योतिष पर हैं। 12वें अध्याय में ब्रह्मगुप्त ने अंकगणित, क्षेत्रमिति और ज्यामिति सम्बन्धी तथा 18वें अध्याय में बीजगणित सम्बन्धी अनेक प्रकरणों पर सूत्र दिए हैं। ब्रह्मगुप्त का ज्यामितीय कार्य बहुत महत्वपूर्ण रहा है। उन्होने त्रिभुजों, आयतों, समलम्बों, वर्गों इत्यादि पर सूत्र देने के साथ–साथ चक्रीय चतुर्भुजों (Cylic Quadrilaterals) के क्षेत्रफल और विकर्णों को ज्ञात करने सम्बन्धी सूत्र दिए, जिन्हे विशेष रूप से उल्लेखनीय और अद्वितीय रूप से श्रेष्ठतम बताया जाता है।

ब्राह्म–स्फुट सिद्धान्त के 12वें अध्याय के 21वें श्लोक[8] की दूसरी पंक्ति के माध्यम से द्वारा चक्रीय चतुर्भुज की भुजाओं के पदों में उसका वास्तविक क्षेत्रफल ज्ञात होता है–

स्थूलफलं त्रिचतुर्भुजबाहुप्रतिबाहुयोगदलघातः।
भुजयोगार्ध चतुष्टय भुजोनघातात् पदं सूक्ष्मम्।।

अर्थात् चक्रीय चतुर्भुज की भुजाओं के योग के आधे से क्रमशः भुजाएँ घटाकर प्राप्त चतष्टय (चार समूहों) के गुणनफल का वर्गमूल उसका सूक्ष्म (वास्तविक) क्षेत्रफल होता है। उपरिलिखित सूत्र गणितीय भाषा में आज इस प्रकार व्यक्त होता है–

चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$,

जहाँ $2s = a+b+c+d$, a, b, c और d चक्रीय चतुर्भुज की भुजाएँ हैं।

ब्रह्मगुप्त के इस सूत्र की व्यापकता है कि $d = 0$ रखने पर इससे त्रिभुज का क्षेत्रफल प्राप्त होता है। इसे हेरोन का प्रमेय[9] (Heron's Theorem) कहते हैं।

ब्राह्म–स्फुट सिद्धान्त के 12वें अध्याय के ही 28वें श्लोक[8] के माध्यम से ब्रह्मगुप्त ने विकर्णों की लम्बाई हेतु भी सूत्र दिए हैं–

कर्णाश्रितभुजघातैक्यमुभयथाऽन्योऽन्यभाजितं गुणयेत्।
योगेन भुजप्रतिभुजवधयोः कर्णौ पदे विशमे।।

अर्थात् विकर्णों पर आश्रित दो–दो भुजाओं के गुणनफल का योग कर उनको अलग–अलग रखें, फिर सम्मुख की दोनों भुजाओं के योग से गुणा करके दूसरे विकर्ण पर आश्रित दोनों भुजाओं के योग से भाग दें तो पहले विकर्ण का मान मिलेगा। इसी तरह दूसरे विकर्ण का मान पहले विकर्ण पर आश्रित दोनों भुजाओं के गुणनफल के योग से भाग देने पर मिलेगा। इसी श्लोक को गणितीय भाषा में व्यक्त करने पर हम पाते हैं कि यदि a, b, c और d किसी चक्रीय चतुर्भुज की भुजाएँ हों तथा x और y उसके दो विकर्ण हों तो–

$x = \sqrt{[(ab+cd)\,(ac+bd)\,/(ad+bc)]}$ तथा $y = \sqrt{[(ac+bd)\,(ad+bc)\,/(ab+cd)]}$

इस प्रकार हम पातें हैं कि $xy = (ac + bd)$ जो कि चक्रीय चतुर्भुज का एक उपयोगी गुणधर्म है इसे टालेमी का प्रमेय[9] (Ptolemy 's Theorem) कहते हैं।

उल्लेखनीय है कि आधुनिक गणित, जिसे प्रायः यूरोपियन गणितज्ञों की ही देन माना जाता है, के अनेक सूत्र/साध्य/प्रमेय आदि प्राचीन भारतीय गणितज्ञों द्वारा कूट शब्दों में व्यक्त श्लोकों को गणितीय भाषा में रूपान्तरित करने पर प्राप्त होते हैं। आवश्यकता है मंत्रों की तरह गूढ़ मर्म वाले इन श्लोकों का अर्थ समझने की। ब्रह्मगुप्त पैग़म्बर मोहम्मद के समकालीन थे। पैग़म्बर–ए–इस्लाम के उत्तराधिकारी अल–मंसूर के समय में ही गणित और ज्योतिष सम्बन्धी अनेक संस्कृत ग्रंथों के अनुवाद अरबी भाषा में हुए। अरबी में अनूदित प्रथम दोनों कृतियाँ ब्रह्मगुप्त की ही थीं। मोहम्मद इब्न इब्राहिम अल–फ़ज़ारी ने 'अल–सिन्द हिन्द' शीर्षक देकर 'ब्राह्म–स्फुट सिद्धान्त' का और इब्न तारीक ने 'अल–अरकन्द' नाम से 'खण्ड–खाद्यक' ग्रंथ का अनुवाद[2] किया। इन अनूदित ग्रन्थों ने अरब में गणितीय–ज्योतिष और बीजगणित के प्रचार–प्रसार में महत्वपूर्ण योगदान दिया। इस प्रकार हम पाते हैं कि अरबवासियों ने संख्यांकों की भाँति बीजगणित का भी ज्ञान भारतीयों से ही प्राप्त किया था। अरब में आज भी संख्यांकों को 'हिन्दसा' कहते हैं। बीजगणित को अंग्रेजी में Algebra कहते हैं यह नाम भी अरब देश से आया है।[1]

बीजगणित का विकसित और प्रोन्नत स्वरूप 09वीं शताब्दी के जैन परम्परा के अप्रतिम गणितज्ञ महावीराचार्य की निर्विवाद, प्रामाणिक एवं एकमात्र प्रतिनिधि कृति 'गणितसार–संग्रह'[5] में दिखाई देता है। अद्भुत गणितीय प्रतिभा के साथ उनकी इस कृति में महावीराचार्य की विलक्षण काव्य क्षमताओं का भी परिचय मिलता है। गणित की कुछ मूलभूत संकल्पनाओं को सर्वप्रथम प्रस्तुत करने का श्रेय आचार्य महावीर को जाता है।[10] लघुतम समापवर्त्य (लीस्ट कॉमन मल्टिपल) की अवधारणा और क्रमचय एवं संचय (परमुटेशन एण्ड कॉम्बिनेशन) की विधियों पर महावीर का योगदान उल्लेखनीय है। वर्ग समीकरणों के दोनों मूलों का परिकलन महावीर ने किया है, किन्तु अधिकांश में एक को अग्राह्य मान कर केवल दूसरे अन्य ग्राह्य एक मूल को ही उन्होंने स्वीकारा है। महावीर ने उच्च घातांकों वाले समीकरणों की भी विस्तृत व्याख्या अपनी कृति गणितसार–संग्रह के चौथे अध्याय[5] में की है। उनमें से एक उदाहरण उल्लेखनीय है–

द्वित्रिभागस्य यन्मूलं नवघ्न हस्तिनां पुनः।
शेषं त्रिपंचमांषस्य मूलं शड्भिः समाहतम्।।
विगलद्दानधारार्द्र गण्डमण्डल दन्तिनः।
चतुर्विंषतिरादृश्टा मयाख्याँ कति द्विपाः।।

अर्थात् हाथियों के एक झुंड में से उनकी कुल संख्या के दो–तिहाई भाग के वर्गमूल के नौ गुने एक स्थान पर, शेष के 3/5 भाग के वर्गमूल के छह गुने किसी दूसरे स्थान पर तथा शेष 24 हाथी वन में देखे गए, जिनके गण्डस्थल से मद झर रहा था। हाथियों की संख्या ज्ञात करो।

हल– यदि हाथियों की कुल संख्या x मानें और $y = x - 9\sqrt{2x/3}$ प्रतिस्थापित करें तो बीजीय अभिव्यक्ति से प्राप्त समीकरण होगा –

$$y - 6\sqrt{3y/5} = 24$$

इसलिए $y = 60$ या 48/5 जिससे x के क्रमशः दो मान 150 और 24 प्राप्त होते हैं, अर्थात् हाथियों की कुल संख्या 150 है (अग्राह्य मानों को छोड़ दिया गया है)।

श्रीधराचार्य (870–930 ई.) के संदर्भ में बहुत कम जानकारी उपलब्ध है। पाटीगणित और गणितसार नामक उनकी दो रचनाएँ उपलब्ध हैं। गणितसार में 300 श्लोक हैं इस कारण यह ग्रंथ 'त्रिषतिका' नाम से प्रसिद्ध है। उन्होंने वर्ग समीकरणों को हल करने की विधि भी विकसित की थी जिसे श्रीधराचार्य विधि कहते हैं। श्रीधराचार्य का काव्यलाघव श्लाघनीय है। गणितीय प्रश्नों की काव्यात्मक प्रस्तुति उनकी विशेषता है। श्रीधराचार्य के गणितीय जगत के प्रश्नों के काव्यसौंदर्य और सरस रूप–विधान के परिचय हेतु उनके ग्रंथ 'त्रिशातिका' का केवल एक ही उदाहरण[4] समीचीन होगा। इस श्लोक में श्रीधराचार्य ने प्रणय–केलि में मग्न एक युगल का वर्णन किया है। प्रणय कलह में कामिनी के गले से टूटी मुक्ता माला के मोती बिखर गए और माला के मोतियों की कुल संख्या ज्ञात करनी है।

कामिन्या हारवत्याः सुरतकलहतो मौक्तिकानां त्रुटित्वा
भूमौ यातस्त्रिभागः षयनतलगतः पंचमांषष्च दृश्टः।
आत्त शश्ठः सुकेष्या गणक दषमकः संगृहीतः प्रियेण
दृश्टं शट्कंच सूत्रे कथय कतिपयैर्मौक्ति कैरेश हारः।।

(ऐसा ही एक प्रश्न महावीराचार्य के गणितसार–संग्रह[5] में मिलता है। प्रतीत होता है कि आचार्य महावीर से ही प्रेरणा ले कर श्रीधराचार्य ने यह प्रश्न कल्पित किया है।)

अर्थात् हे गणक! सुरति–कलह में किसी कामिनी की मोती की माला टूटने से मोतियों का तिहाई भाग शय्या के नीचे भूमि पर, पाँचवाँ भाग शय्या पर, छठवाँ भाग कामिनी को और दसवाँ भाग उसके प्रिय को मिला, शेष 06 मोती धागे में ही लगे मिले, तो बताओ कि माला में कुल कितने मोती थे?

यानि $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} + \frac{x}{10} + 6 = x$, उत्तर $x = 30$

महावीराचार्य अथवा श्रीधराचार्य से प्रेरित होकर किसी विद्वान ब्रजभाषी कवि ने राधा और कृष्ण के प्रसंग में निम्नलिखित काव्य पहेली रची–

एकु समय वृषभानु सुता कौ मुक्तन माला टूटौ।
सेज रहे सैंतीस, धरनि में ओहिकै आधौ छूटौ।
विघ्न भए नौं भाग, श्याम ने पाँचै भाग चुराए।
तिरसठ रहि गए हाथ, सखी नें सत्तर पाए।।

यानि $37 + \frac{x}{2} + \frac{x}{9} + \frac{x}{5} + 63 + 70 = x$, उत्तर $x = 900$

1114 ई. में भास्कराचार्य (भास्कर–2) का जन्म हुआ और उन्होंने 1150 ई. में गणित और ज्योतिष के अपने सुप्रसिद्ध ग्रंथ 'सिद्धान्त शिरोमणि'[6] की रचना की। इसके चार भाग हैं– लीलावती, बीजगणित, गोलाध्याय और ग्रह–गणित। 'लीलावती' भास्कराचार्य की अप्रतिम कृति है। इसमें अंकगणित, बीजगणित और ज्यामिति के सिद्धान्तों का प्रतिपादन किया गया है। आचार्य भास्कर द्वारा यह कृति अपनी पुत्री लीलावती के नाम समर्पित की गई है। अपने पूर्ववर्ती गणितज्ञों की भाँति भास्कराचार्य भी गणितीय प्रश्नों की रोचक काव्यात्मक प्रस्तुति में सिद्धहस्त हैं। 'लीलावती' में एक प्रश्न के माध्यम से वे महाभारत के युद्ध में कर्ण–अर्जुन के मध्य द्वन्द्व का सजीव वर्णन करते हुए यह वर्ग समीकरण[6] प्रस्तुत करते हैं–

पार्थः कर्णवधाय मार्गणगणं क्रुद्धो रणे संदधे
तस्यार्धेन निवार्य तच्छरगणं मूलैष्चतुर्भिर्हयान्।
शल्यं षड्भिरथेषुभिस्त्रिभिरपिच्छत्रं ध्वजं कार्मुकं
चिच्छेदास्य शिरःशरेण कति ते यानर्जुनः संदधे।।

अर्थात् युद्ध में क्रुद्ध होकर अर्जुन ने कर्ण को मारने के लिए जितने बाण लिए उनके आधे से कर्ण के बाणों को रोका और कुल बाणों के मूल के चार गुने बाणों से कर्ण के रथ में जुते घोड़ों को मार कर 06 बाणों से सारथी शल्य को मारा, 03 बाणों से कर्ण के छत्र, ध्वजा और धनुष को तथा एक बाण से उसका सिर काट डाला तो बताओ अर्जुन ने कितने बाण लिए थे।

इस प्रश्न को समीकरणीय प्रारूप में रूपांतरित कर प्राप्त वर्ग समीकरण (क्वाडरेटिक इक्वेशन) को हल करने पर बाणों की कुल संख्या 100 प्राप्त होती है।

उक्त कतिपय उदाहरणों से, जो कि निदर्शी (Illustrative) मात्र हैं, न कि सर्वसमावेशी (Exhaustive) स्पष्ट होता है कि हमारे देश के प्राचीनकालीन विद्वानों ने भारत में गणित के विकास की परम्परा को अक्षुण्ण रखते हुए उसे और समृद्ध किया। ईस्ट इण्डिया कम्पनी सिविल सेवा के मानद अधिकारी रहे चार्ल्स एम. व्हिश महोदय ने मद्रास लिटरेरी सोसाइटी को 1832 ई. में दिए वृत्तान्त में आर्यभट्ट से लेकर तत्कालीन भारतीय गणितज्ञों, जोकि समग्र रूप से गणित के प्रति समर्पित थे, के योगदान की व्यापक चर्चा की है।[9] शुष्क और नीरस कही जाने वाली अवधारणाओं की लोकरंजक प्रस्तुति भारतीय गणितज्ञों की काव्यात्मक प्रतिभा का ही चमत्कार है।

इन्हीं काव्य प्रतिभा सम्पन्न गणितज्ञों से प्रेरित होकर लोक मानस में भी अनेक प्रश्न प्रचलित थे। ये प्रश्न पहेली के रूप में गणित के लोकरंजक स्वरूप और उसकी सार्वजनीन व्यापकता के द्योतक हैं। लोक काव्य में समस्या पूर्ति की भाँति पहेलियों का विशेष प्रचलन हुआ। सच्चे अर्थों में पहेलियाँ परम्परा से प्राप्त अनुभवों की अभिव्यक्ति होती हैं। इनसे आश्चर्ययुक्त कौतूहल की तृप्ति और त्वरा बुद्धि का परीक्षण होता है। बौद्धिक व्यायाम हेतु पहेलियाँ एक उत्तम साधन थीं। ग्राम्य जीवन में मनोरंजक कौतुक के रूप में किशोर एवं युवा वर्ग ने पहेलियों को पर्याप्त प्रमुखता दी, किन्तु इनको संकलित कर लिपिबद्ध नहीं किए जाने के कारण ये मौखिक परम्परा में ही रहीं और धीरे–धीरे भुला दी गईं। लोक जीवन में संकल्पनाएँ किस प्रकार प्रतिपादित होती हैं, पहेलियों के रूप में ऐसे ही कुछ संग्रहीत उदाहरण निम्नवत् हैं, जिनकी जानकारी हमें अलग–अलग क्षेत्रों के लोगों से विभिन्न समयों पर मिली–

1. चार आना बकरी, आठ आना गाय, चार रुपैया मा भैंस बिकाय।
बीसै रुपैय्या मा बीसै जीव, केहि विधि लइहौ तुम मतिसींव।।

अर्थात् बकरी का मूल्य चार आना, यानी पच्चीस पैसा है, गाय का मूल्य आठ आना, यानी पचास पैसा है और भैंस का मूल्य चार रुपया है। यदि बीस रुपये में बीस ही जीव लाने हों, तो हे सीमित बुद्धि वाले! बताओ कि प्रत्येक जीव की संख्या कितनी होगी। (उत्तर– 15 गाएँ, 02 बकरियाँ और 03 भैंसें)

2. एक मन लोहा सौ हथियार। पउवा छूरी सेर कटार।
पँच–पँच सेर बने तलवार। बूझौ कइसे होए तयार।।

अर्थात् एक मन (40 सेर) लोहे से सौ हथियार बनते हैं, एक पाव (चौथाई सेर) से छुरी, एक सेर से कटार तथा पाँच सेर से तलवार बनती है, तो छुरी, कटार और तलवार कितनी–कितनी संख्या में बनेंगीं? (उत्तर– 96 छुरियाँ, 01 कटार और 03 तलवारें)

3. मन भर गोहूँ, डार भर कउवा, बाँटे आवै पउवा–पउवा।

अर्थात् एक मन गेहूँ है; डाल पर बहुत सारे कौवे हैं। यदि प्रत्येक को एक–एक पाव गेहूँ मिले, तो कौवों की संख्या बतानी है। (उत्तर– 160)

4. एक परवरा नौ सौ बिया, नौ सौ बरस परवरा जिया।
नौ सौ परवर टूटैं रोज, पंडित करौ बिया कै खोज।।

अर्थात् एक परवल की लता नौ सौ वर्षों तक जीवित रही और प्रतिदिन उससे नौ सौ परवल प्राप्त होते रहे। एक परवल में यदि नौ सौ बीज हों, तो हे विद्वान! कुल कितने बीज होंगे?

इसका उत्तर भी पद्य में ही है–

छब्बिस पर चौबीस धरे, आगे चार सुजान।
सात सून्य आगे धरे, यहै बिया परमान।।

अर्थात् कुल 2,62,44,00,00,000 बीज होंगे।

(सुविधा के लिए एक वर्ष में बारह महीने तथा महीने में 30 दिन माने गए हैं।)

5 अठन्नी चवन्नी नौ ठौरे। पूरा रुपैया कै ठौरे।।

अर्थात् यदि पचास पैसे (अठन्नी) और पच्चीस पैसे (चवन्नी) के कुल नौ सिक्के हों, तो अठन्नियों और चवन्नियों का संयोजन कैसे किया जाए कि उनसे पूरा रुपया बन जाए?

इसके दो उत्तर संभावित हैं; छह चवन्नियाँ और तीन अठन्नियाँ लेने पर तीन रुपये पूरे होते हैं, और दो चवन्नियाँ और सात अठन्नियाँ लेने पर चार रुपये पूरे होते हैं।

लोक भाषाओं की ही तर्ज़ पर उर्दू भाषा में भी गणित और ज्यामिति विषयक कुछ प्रश्न तथा उनके उत्तर शायरी में मिलते हैं। जैसे कि –

किसी ज़मींदार ने अपने माली को एक विशेष व्यवस्था में बाग़ लगाने का निर्देश इस शायराना अंदाज़ में दिया–

ऐ बाग़बाँ इक बाग़ रख, जिसमें शजर उन्नीस हों।
नौ क़तारें हों रवाँ और हर रविश में पाँच हों।।

(बाग़बाँ माली, शजर पेड़, क़तार पंक्ति, रविश पंक्ति)

जब माली नहीं समझ पाया कि बाग़ किस विधि से लगेगा, तो उसे जो तरीक़ा बताया गया वह भी शायरी में ही था–

रख मुसल्लस पर मुसल्लस, बीच में होवे लकीर।
और फिर हर मोड़ पर रख इक शजर, तो हों उनीस।।

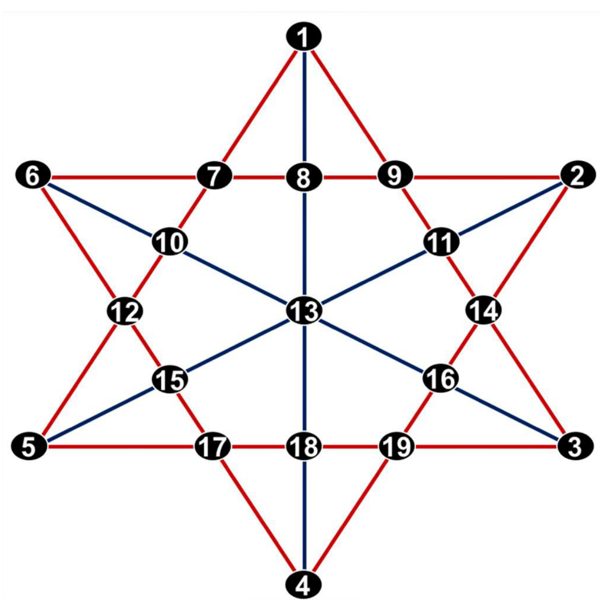
यानी एक त्रिभुज पर दूसरा त्रिभुज इस प्रकार रखो कि त्रिभुजों के शीर्षों को मिलाने वाली रेखाएँ एक बिन्दु से ही हो कर जाएँ, जहाँ–जहाँ पर त्रिभुजों की भुजाएँ और शीर्षों को मिलाने वाली रेखाएँ एक दूसरे से मिलेंगी, वहाँ–वहाँ पर पौधे लगेंगे और उनकी संख्या उन्नीस होगी। **(चित्र–1)**

यही प्रश्न लोकभाषा अवधी में भी इन शब्दों में मिलता है–

एक माली अस बाग लगाइस की बिरवा कुल उन्नीस।
नौ पांतन माँ पाँच–पाँच, बूझौ कइसे नाही झुकाओ सीस।।

आचार्य भास्कर की कृति 'लीलावती' का अकबर के दरबारी कवि फ़ैज़ी ने 1587 में फ़ारसी में अनुवाद किया था। 'लीलावती' के क्षेत्रव्यवहार नामक अध्याय में समकोण त्रिभुजों पर बहुत से रोचक प्रश्न दिए हैं,[1] उन्हीं प्रश्नों से प्रेरित उर्दू में छंदबद्ध एक व्यावहारिक उदाहरण निम्नवत है–

अज़ीज़म, तीस हाथ का था ,शजर, गिरा धड़ से टूट कर बीस हाथ पर।
जहाँ पर गिरा वहीं रह गया, मुसल्लस की सूरत में झट बन गया।।



चित्र–1: बाग का स्वरूप

यानी मेरे प्यारे (अज़ीज़म), तीस हाथ लम्बा एक पेड़ था। ऊपर से बीस हाथ की लम्बाई से टूट कर ज़मीन पर गिर गया और इस प्रकार उसने त्रिभुज की आकृति बना ली।

प्रश्न यह है कि पेड़ का टूटा हुआ हिस्सा ज़मीन से कितने अंश का कोण बनाएगा। सम्भवतः प्रश्न वाला हिस्सा भी पद्य में ही होगा, किन्तु वह अप्राप्य है। (उत्तर– 30 अंश)

यदि किसी व्यंजक (Expression) में कोष्ठकों के साथ–साथ गुणा, भाग, जोड़ और घटाव सभी संक्रियायें सम्मिलित हों तो उसे सरल करने हेतु BODMAS नियम को उर्दू शायरी में इन शब्दों में याद कराया जाता था–

का को पहले काट कर फिर कीजिए तक़सीम को।
ज़र्ब हो तो ज़र्ब दो और जमा को जोड़ दो।।
बादहू मनफ़ी को फ़ौरन घटाना चाहिए।
इस तरीक़े से क़सर यारो लगाना चाहिए।।
(तक़सीम = भाग, ज़र्ब = गुणा, जमा = धन, मनफ़ी = ऋण)

अब कुछ हास–परिहास की बात।

'अकबर' इलाहाबादी ने व्यंग्य में किसी के गणित (रियाज़ी) ज्ञान को चुनौती देते हुए ये शेर कहा–

दावा बहुत बड़ा है रियाज़ी में आपको।
तूल–ए–शब–ए–फ़िराक़ को तो नाप दीजिए।।

यानी अगर आपको अपने गणित ज्ञान पर बड़ा गर्व है, तो विरह की रात की लम्बाई तो नाप कर बता दीजिए।

इस शेर के जवाब में 'ग़रीब' उपनाम के शायर ने भी नहले पर दहला जड़ते हुए ये शेर कहा–

तूल–ए–शब–ए–फ़िराक़ जो नापी गई 'ग़रीब'।
लैला की ज़ुल्फ़ से रही दो–चार हाथ कम।।

कविता के माध्यम से किसी तथ्य को हृदयंगम करने में सुगमता एवं स्मरणशीलता का एक अनुपम उदाहरण एक श्लोक[9] है–

गोपी भाग्य मधुब्रात अड्ि़गृश्रोदधि संधिगः
खलजीवितखातावगलहभलारसंधरः।

निम्नलिखित सारिणी के अनुसार इस श्लोक के व्यंजनों (मात्राओं, स्वरों और हलन्त अक्षरों को छोड़कर) के मानांक रखने पर दशमलव के 32 अंकों तक π का मान मिलता है–

3.14159265358979323846264338432792.................

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
क	ख	ग	घ	ङ	च	छ	ज	झ	ञ
ट	ठ	ड	ढ	ण	त	थ	द	ध	न
प	फ	ब	भ	म					
य	र	ल	व	श	ष	स	ह		

अंग्रेज़ी भाषा की कई पद्य रचनाएँ हैं, जिनके शब्दों के अक्षरों को गिन कर π का मान लिखा जा सकता है। जैसे–

See ! I have a rhyme assisting
My feeble brain its tasks oft-times resisting

3.141592653589.................

अंत में गणित और अध्यात्म के पारस्परिक सम्बंध में किसी कवि की इन पंक्तियों से इस लेख का समापन करना चाहूँगा–

ईश्वर है एक ऐसा वृत्त, जिसका केन्द्र है सर्वत्र।
किन्तु परिधि है कहाँ, न यहाँ, न वहाँ।।

3. निष्कर्ष एवं सुझाव

जहाँ एक ओर संस्कृत में लिखीं प्राचीन भारतीय गणितज्ञों की अनेक रचनाएँ और पुस्तकें उपलब्ध हैं, वहीं दुर्भाग्य से लोक भाषा में गणितीय पहेलियाँ और उर्दू में तत्संबंधी शायरी लिपिबद्ध रूप में कहीं एक स्थान पर संग्रहीत नहीं हैं। ऐसे में दूर–दराज़ के क्षेत्रों के जानकार और रुचिवान लोगों से भेंट कर ऐसी ही और पहेलियाँ संकलित करने की आवश्यकता है ताकि लोक में प्रचलित भाँति–भाँति की गणितीय पहेलियाँ लिपिबद्ध की जा सकें। बहुत सम्भावना है कि यदि प्रारम्भ से ही बच्चों में, इस प्रकार की रोचक पहेलियों के माध्यम से, गणित के प्रति रुचि उत्पन्न की जाए, तो वे गणित को कठिन और नीरस विषय नहीं समझेंगे। इस संदर्भ में पूर्व में हुए अनेक शोधों[11] और हाल ही में किए गये एक विश्लेषणात्मक अध्ययन[12] में भी गणित शिक्षण को प्रारंभ से ही और रुचिकर बनाने की अनुशंसा की गई है।

संदर्भ

1. मोहन, ब्रज (1965) गणित का इतिहास, हिन्दी समिति, सूचना विभाग, उ0प्र0, लखनऊ।
2. दूबे, महश (2015) विश्व के प्रसिद्ध बीजगणितज्ञ, राष्ट्रीय पुस्तक न्यास, भारत।
3. सचाऊ, एडवर्ड सी0 (2002) अलबरूनीज़ इण्डिया, रूपा पब्लिकेशंस इण्डिया प्रा0 लि0, दिल्ली, भारत।
4. सुद्युम्न आचार्य (सम्पादक) (2004) श्रीधराचार्य कृत त्रिशतिका, राष्ट्रीय संस्कृत संस्थान, दिल्ली, भारत।
5. जैन, लक्ष्मीचन्द्र (सम्पादक) (1963) महावीराचार्य कृत गणित सार–संग्रह, जैन संस्कृति संरक्षक संघ, सोलापुर, महाराष्ट्र, भारत।
6. शर्मा, सत्यदेव (व्याख्याकार) – भास्कराचार्य कृत सिद्धान्त शिरोमणि, चौखम्बा सुरभारती प्रकाशन, वाराणसी।
7. क्लार्क, वाल्टर आयगेन (अनुवादक) (1930) द आर्यभटीय ऑफ आर्यभट्ट, डी.के.प्रिंटवर्ल्ड (प्रा.) लि., नई दिल्ली, भारत।
8. शर्मा, राम स्वरूप (प्रधान संपादक) (1966) श्री ब्रह्मगुप्त विरचित ब्राह्म–स्फुट–सिद्धान्त,इण्डियन इंस्टीट्यूट ऑफ ऐस्ट्रोनॉमिकल एण्ड संस्कृत रिसर्च, नई दिल्ली–05, भारत।
9. भानुमूर्ति, टी0 एस0 (2009) ए मार्डर्न इन्ट्रोडक्शन टू एन्शेंट इण्डियन मैथेमैटिक्स, न्यू ऐज इण्टरनेशनल पब्लिशर्स, नई दिल्ली, भारत।
10. जैन, रमा (2016) जैन गणित, अनुसंधान विज्ञान शोध पत्रिका, खण्ड–4, अंक–1, मु0पृ0 60–62। DOI: 10.22445/avsp.v4i1.4380
11. चौहान, सी0 पी0 एस0 (1984) नेचर ऑफ मैथेमैटिक्ल एबीलिटी, विश्वविद्यालय प्रकाशन, वाराणसी, उ0प्र0, भारत।
12. सिंह, राजीव कुमार (2017) माध्यमिक स्तर के विद्यार्थियों में गणित विषय के प्रति अभिरूचि का विश्लेषणात्मक अध्ययन, अनुसंधान विज्ञान शोध पत्रिका, खण्ड–5, अंक–1, मु0पृ0 67–69। DOI: 10.22445/avsp.v5i01.9850