खण्ड-13, अंक-1, वर्ष-2025, मु0प्र0 54-60
D.O.I.: https://doi.org/10.22445/avsp.v13i1.10
SJIF (2025) : 8.749

समीक्षा आलेख

Three Moments theorem vis-à-vis Moment Distribution method-A pragmatic approach

Manoj Kumar Varshney
Department of Civil Engineering, D. N. Polytechnic, Meerut-251 003, UP, India
manojvarshaney17@rediffmail.com

Received: 10-10-2025, Accepted: 15-11-2025

Abstract- The pragmatic approach regarding the three moment theorem versus moment distribution method has been in regular practice to get the moments on supports which has been always under confusion, about the resulting moments at support. The author's title revealed through illustrations that resulting moments calculated on supports by applying both methods, result almost remained same.

Key words- Three Moments theorem, Moment Distribution method, a pragmatic approach

तीन आघूर्ण प्रमेय बनाम आघूर्ण वितरण विधि–एक व्यावहारिक दृष्टिकोण

मनोज कुमार वार्ष्णेय
सिविल इंजीनियरिंग विभाग, डी0 एन0 पॉलीटैक्निक, मेरठ–250 103, उ0प्र0, भारत
manojvarshaney17@rediffmail.com

सार– तीन आघूर्ण प्रमेय व आघूर्ण वितरण विधि से सपोर्ट पर आघूर्ण ज्ञात करने की प्रक्रिया नियमित रुप से प्रैक्टिस में संदेहास्पद रही है। लेखक के तकनीकी पेपर से उदाहरण के माध्यम से स्पष्ट हुआ है कि धरन के सपोर्ट पर परिणामी आघूर्ण का मान दोनों विधियों से सम्भवतः एक समान ही आता है। अनुप्रयोग किया गया और यह पाया गया कि गणना के आधार पर अंतिम आघूर्ण दोनों विधियों से पूर्णतः लगभग समान ही आये हैं।

बीज शब्द– तीन आघूर्ण प्रमेय, आघूर्ण वितरण विधि, एक व्यावहारिक दृष्टिकोण

1. **परिचय–** तीन आघूर्ण प्रमेय प्रायः अनवरत धरनों पर आ रहे भार के कारण उत्पन्न नमन आघूर्ण व कर्तन बल के साथ–साथ उनके आरेख भी ड्रा करने के लिये उपयोगी हैं। यह सिद्धान्त 1857 में एमिल क्लेपयार्न ने विकसित किया था। इस सिद्धान्त के अनुसार दो क्रमागत पाटों के मुक्त नमन आघूर्ण को उनकी लम्बाई के साथ लेकर मुक्त नमन आघूर्ण का क्षेत्रफल आघूर्ण के साथ बराबर किया जाता है जिसमें EI का मान नियत अथवा हर पाट के लिये कुछ अलग भी हो सकता है। दो से अधिक पाटों के लिये हर बार दो क्रमागत पाट ही लेकर अगले दो पाटों का विश्लेषण किया जाता है। निम्न समीकरण सामान्य नोटेशन के साथ इस प्रकार है।

$$Ma\, L_1/EI_1 + 2Mb\,(L_1/EI_1 + L_2/EI_2) + Mc\, L_2 = 6A_1 X_1/EI_1L_1 + 6A_2X_2/EI_2L_2$$

आघूर्ण वितरण विधि में इटरेटिव आघूर्ण क्रमशः विस्थापित होते रहते है। इस विधि को 1930 में हार्डी क्रॉस ने विकसित किया था। जिसमें अज्ञात संरचनाओं यथा अनवरत धरनों व दृढ पोर्टल फ्रेमों पर विकसित होने वाले असंतुलित आघूर्ण को फ्रेम के सदस्यों में मैंनुअली वितरित करते हुए संतुलन की स्थिति तक किया जाता है। यह तकनीकी पेपर उक्त दोनों विधियों से प्राप्त आघूर्ण की उदाहरण सहित पुष्टि करता है और विधियों की प्रासंगिकता का महत्व दर्शाता है।[1–2]

2. **मुख्य शब्द–**

E= प्रत्यास्थ का मापांक, I= जड़त्वाघूर्ण, A= सम्बन्धित अवधि के लिये मुक्त नमन आघूर्ण आरेख का क्षेत्रफल, M= अवलम्बों पर आबद्ध नमन आघूर्ण, X= मुक्त नमन आघूर्ण आरेख के सम्बन्धित छोर से गुरुत्वकेन्द्र की दूरी, L= सम्बन्धित पाट की लम्बाई, D.F.=वितरण कारक, UDL= समान रुप से वितरित भार, W= बिन्दु भार

3. **विधि–** तीन आघूर्ण प्रमेय में प्रत्येक पाट के लिये अधिकतम नमन आघूर्ण ज्ञात करते हुए नमन आघूर्ण का क्षेत्रफल व इसके गुरुत्व केन्द्र की आलम्ब से दूरी की गणना की जायेगी। फिर निम्न सूत्र से आलम्ब के लिये गणना की जायेगी।

$$Ma\,L_1/EI_1 + 2Mb\,(L_1/EI_1 + L_2/EI_2) + Mc\,L_2 = 6\,A_1\,X_1/EI_1L_1 + 6A_2X_2/EI_2L_2$$

यदि प्रारम्भ व अन्त के सपोर्ट फिक्स हैं, तो काल्पनिक लम्बाई मानकर जिसके लिए मुक्त नमन आघूर्ण भून्य होगा, को सूत्र

$$Ma\,L_1/EI_1 + 2Mb\,(L_1/EI_1 + L_2/EI_2) + Mc\,L_2 = 6\,A_1\,X_1/EI_1L_1 + 6A_2X_2/EI_2L_2$$

में रखकर सपोर्ट क आघूर्ण कैलकुलेट किये जाते हैं। यदि प्रारम्भ व अन्त के सपोर्ट हिंज्ड हैं तो इसके लिए आघूर्ण शून्य लिया जाता है। सभी सपोर्ट पर फाइनल फिक्सिंग मोमेंट ज्ञात कर संयुक्त आघूर्ण मुक्त नमन आघूर्ण के साथ ड्रा कर दिया जाता है। इसी प्रकार आघूर्ण वितरण विधि में सपोर्ट पर फिक्सिंग आघूर्ण ज्ञात कर, आघूर्ण वितरण कारक के साथ आघूर्ण वितरण असन्तुलित आघूर्ण को सन्तुलित कर बीजीय योग करते हुए सपोर्ट पर आघूर्ण ज्ञात किये जाते हैं।

आघूर्ण वितरण विधि में आघूर्ण की गणना सभी जोड़ो को स्थिर मानकर की जाती है जैसे UDL = $w L^2/12$, केन्द्र पर भार = $WL/8$, केन्द्र पर भार नहीं = Wa^2b/L^2, Wab^2/L^2, एक तरफ त्रिकोणीय भार = $wL^2/20$, $wL^2/30$, के द्वारा सपोर्ट रोटेशन के कारण आघूर्ण में वितरण कारक संशोधन के बाद, बीजीय योग कर आघूर्ण ज्ञात किया जायेगा। निम्न उदाहरणों से उक्त प्रमेयों को आसानी से समझा जा सकता है।

केस स्टडी–1

एक अनवरत धरन 6–6 मीटर के दो पाटों A-B व B-C पर टिकी है। पहले पाट के मध्य में 100 Kn का लोड व दूसरे पाट (B-C) के B से 4 मीटर दूर 60 Kn का लोड़ आ रहा है। EI का मान नियत है।

समाधान–1

पाट AB के लिए केन्द्र पर अधिकतम नमन आघूर्ण =150KN-m,
नमन आघूर्ण आरेख का क्षेत्रफल A_1=(0.5) (6) (150)=450 इकाई
X_1=3m, X_2=3m
पाट BC के लिए
अवलम्ब B से अधिकतम नमन आघूर्ण 4m पर = 80KN-m,
नमन आघूर्ण आरेख का क्षेत्रफल BMD A_2 =(0.5) (6) (80)=240 इकाई
X_1=10/3, X_2=2+6/3=8/3

पाट AB-BC के लिए तीन आघूर्ण प्रमेय
Ma (6) + 2Mb (6+6) +Mc (6)=6(450)(3)/6 + 6(240)(8/3)/6
चूंकि अवलम्ब A और C मुक्त हैं, इसलिए Ma और Mc भून्य होंगे
तो 24 Mb = 1350+640=1990
इसलिए Mb= 1990/24 =82.91 KN-m, Ma=0 और Mc=0

आघूर्ण वितरण विधि

Mab= - W L/8 =100 (6)/8 = -75 KN-m, Mba=75 KN-m
Mbc= - Wab^2/L^2 = -60 (4) (22)/36 = -26.67 KN-m, Mcb = Wa^2b/L^2= 60(2)(42)=53.33 KN-m

आघूर्ण वितरण तालिका

जोड़	अवयव	कड़ापन	कुल कड़ापन	वितरण कारक
A	BA	4EI/6	8EI/6	0.5
	BC	4EI/6		0.5

आघूर्ण वितरण तालिका

A	B	B	C
	0.5	0.5	
-75	75	-26.67	53.33
+75	+37.7	-26.67	-53.33
0	112.5	-53.34	0
	-29.58	-29.58	
0	82.92	-82.92	0

केस नंबर–1 के नतीजे से पता चला है कि फिक्सिटी के कारण सपोर्ट पर आघूर्ण दोनों तरीकों से समान रहा। दोनों स्थितियों में मुक्त नमन आघूर्ण समान होगा।

केस अध्ययन–2

एक अनवरत धरन 6–6 मीटर के दो पाटों A-B व B-C पर टिकी है। पहले पाट के मध्य में 100 Kn का लोड व दूसरे पाट B-C के B से 4 मीटर दूर 60 Kn का लोड आ रहा है। EI का मान नियत है। पहला आलम्ब A फिक्स्ड है एवं दूसरा आलम्ब हिंज्ड है।

समाधान–2–

पाट A-B के लिए

अधिकतम केन्द्र पर नमन आघूर्ण =**150KN-m,** नमन आघूर्ण आरेख का क्षेत्रफल **BMD** A_2 **=(0.5) (6) (150)=450** इकाई

X_1=3m, X_2=3m

पाट B-C के लिए

सपोर्ट B से 4m पर अधिकतम नमन आघूर्ण = **80KN-m ,**

नमन आघूर्ण आरेख का क्षेत्रफल **(BMD)** A_3**=(0.5) (6) (60)=240** इकाई

X_1=10/3, X_2=2+6/3=8/3

पाट **A^1A-AB** के लिए तीन आघूर्ण प्रमेय

Ma^1 (0) + 2Ma (0+6) +Mb (6) = 6(0)(0)/6 + 6(450)(3)/6

चूंकि सपोर्ट A^1मुक्त है, इसलिए Ma^1 शून्य होगा।

इसलिए **2 Ma + Mb = 225** ----------(1)

पाट **AB-BC** के लिए तीन आघूर्ण प्रमेय

Ma (6) + 2Mb (6+6) +Mc (0) = 6(450)(3)/6 + 6(240)(8/3)/6

चूंकि सपोर्ट C मुक्त है, इसलिए MC शून्य होगा।

इसलिए **Ma + 4Mb = (1350+640)/6 = 331.67** ----------(2)

(1) और (2) को हल करके प्राप्त होगा **Ma = 81.19, Mb = 62.62**

आघूर्ण वितरण विधि– Mab = - W L/8 =100 (6)/8 = -75 KN-m, Mba = 75 KN-m

Mbc= - Wab^2/L^2 = -60 (4)(2^2)/36 = -26.67 KN-m, Mcb = W a^2 b/L^2 = 60(2)(4^2) = 53.33 KN-m

आघूर्ण वितरण कारक तालिका

B	BA	3EI/6	7EI/6	3/7
	BC	4EI/6		4/7
C	CD	4EI/6	7EI/6	4/7
	DC	3EI/6		3/7

आघूर्ण वितरण तालिका

A	**B**	**B**	**C**	**C**	**D**
	3/7	4/7	4/7	3/7	
-75	+75	-26.67	53.34	-53.34	26.67
+75	+37.5			-13.33	-26.67
0	112.5	-26.67	53.34	-66.67	0
	-36.78	-49.05	7.61	5.71	
		3.8	-24.52		
	-1.63	-2.7	14.01	10.51	
		7	-1.35		
	-3	-4	+0.77	+0.58	
		0.385	-2		
	-0.15	-0.22	+1.44	0.86	
		0.72	-0.11		
	-0.31	-0.41	+0.06	+0.05	
0	70.93	71.76	49.25	49.06	0

केस संख्या–4 के परिणाम से पता चला है कि स्थिरता के कारण सपोर्ट पर आघूर्ण दोनों तरीकों से समान रहा। दोनों स्थितियों में मुक्त नमन आघूर्ण समान होगा।

केस अध्ययन –5

एक अनवरत धरन 6–6 मीटर के दो पाटों A-B, व B-C पर टिकी है। पहले पाट के मध्य में 100 Kn का लोड व दूसरे पाट B से 4 मीटर दूर 60, Kn का लोड आ रहा है। EI का मान पहले पाट के लिए 2I व दूसरे पाट के लिए 3I नियत है। आलम्ब, A व C हिंज्ड हैं।

समाधान–5

पाट A-B के लिए केन्द्र पर अधिकतम नमन आघूर्ण =150KN-m,
नमन आघूर्ण आरेख का क्षेत्रफल BMD A_1=(0.5) (6) (150)=450 इकाई, X_1=3m, X_2=3m

पाट B-C के लिए
सपोर्ट B से 4m पर अधिकतम नमन आघूर्ण = **80KN-m,**
नमन आघूर्ण आरेख का क्षेत्रफल **BMD A_2= (0.5) (6) (60)=240** इकाई, **X_1=10/3, X_2=2+6/3=8/3**

पाट AB-BC के लिए तीन आघूर्ण प्रमेय
Ma (6)/2 + 2Mb (6/2+6/3) +M c(6)/3 = 6(450)(3)/6(2) + 6(240)(8/3)/6(3)
चूंकि सपोर्ट **A और** C मुक्त हैं, इसलिए **Ma** और **Mc** शून्य होगा।
इसलिए **10 Mb = 675+213.33=888.33**
इसलिए **Mb= 888.33 / 10 = 88.83 KN-m, Ma=0 and Mc=0**

आघूर्ण वितरण विधि
Mab= - W L/8 =100 (6)/8 = -75 KN-m, Mba =75 KN-m
Mbc= - Wab^2/L^2 = -60 (4)(2^2)/36 = -26.67 KN-m, Mcb =W a^2 b/L^2= 60(2)(4^2)=53.33 KN-m

आघूर्ण वितरण कारक तालिका

A	BA	3EI(2)/6=EI	2.5EI	1/2.5	0.4
	BC	3EI(3)/6=1.5EI		1.5/2.5	0.6

आघूर्ण वितरण तालिका

A	**B**	**B**	**C**
	0.4	0.6	
-75	+75	-26.67	53.33
+75	37.5	-26.67	-53.33
0	112.5	-53.34	0
	-23.66	-35.5	
0	88.84	-88.84	0

केस संख्या–5 के परिणाम से पता चला है कि स्थिरता के कारण सपोर्ट पर आघूर्ण दोनों तरीकों से समान रहा। दोनों स्थितियों में मुक्त नमन आघूर्ण समान होगा।

केस अध्ययन–6
एक अनवरत धरन 6–6 मीटर के तीन पाटों A-B, B-C व C-D पर टिकी है। पहले पाट के मध्य में 100 Kn का लोड व दूसरे पाट B से 4 मीटर दूर 60, Kn का लोड आ रहा है। साथ ही तीसरे पाट C से 2 मीटर दूर 60, Kn का लोड आ रहा है। EI का मान पहले, दूसरे व तीसरे पाट के लिए क्रमशः 2I, 3I व 4I हैं। आलम्ब, A, B व C हिंज्ड हैं।

समाधान–6

लोड के तहत अधिकतम मुक्त नमन आघूर्ण 150 यूनिट, 80 यूनिट और 80 यूनिट होगा।
पाट A-B के लिए केन्द्र पर अधिकतम नमन आघूर्ण **=150KN-m,**
नमन आघूर्ण आरेख का क्षेत्रफल **BMD A_1=(0.5) (6) (150)=450** इकाई, **X_1=3m, X_2=3m**

पाट B-C के लिए सपोर्ट B से 4m पर अधिकतम नमन आघूर्ण **=80KN-m,**
नमन आघूर्ण आरेख का क्षेत्रफल **BMD A_2=(0.5) (6) (80)=240** इकाई, **X_1=10/3, X_2=(2+6)/3=8/3**

पाट C-D के लिए
सपोर्ट C से 2m पर अधिकतम नमन आघूर्ण **=80KN-m,**
नमन आघूर्ण आरेख का क्षेत्रफल **BMD A_3=(0.5) (6) (80)=240** इकाई, **X_1=8/3, X_2=(4+6)/3=10/3**

पाट AB-BC के लिए तीन आघूर्ण प्रमेय
$Ma(L_1/EI_1)+2Mb(L_1/EI_1+L_2/EI_2)+Mc(L_2/EI_2)=6A_1X_1/EI_1L_1+6A_2X_2/EI_2L_2$
Ma (6/2) +2Mb (6/2 +6/3) +Mc (6/3) = 6(450)(3)/6(2) + 6(240)(8/3)/6(3)
चूंकि सपोर्ट A पर आघूर्ण शून्य होगा।
इसलिए **5Mb + Mc = 444.17** ----------(1)

पाट BC-CD के लिए तीन आघूर्ण प्रमेय
Mb (6/3) + 2Mc (6/3+6/4) +Md (0)= 6(240)(10/3)/6(3) + 6(240)(10/3)/6(4)
इसलिए **2Mb + 7Mc= 466.67** ----------(2)

(1) और (2) को हल करके प्राप्त होगा, **Mb = 80.10 bdkbZ and Mc = 43.67** इकाई

आघूर्ण वितरण विधि

Mab= - W L/8 =100 (6)/8 = -75 KN-m, Mba =75 KN-m
Mbc= - Wab^2/L^2 = -60 (4)(2^2)/36 = -26.67 KN-m, Mcb =W a^2 b/L^2= 60(2)(4^2)=53.33 KN-m
Mcd= -53.34 , Mdc=26.67

आघूर्ण वितरण कारक तालिका

B	BA	3EI(2)/6 =1	3	1/3
	BC	4EI(3)/6 = 2		2/3
C	CB	4EI(3)/6 = 2	4	1/2
	CD	3EI(4)/6 =2		1/2

आघूर्ण वितरण तालिका

A	**B**	**B**	**C**	**C**	**D**
	1/3	2/3	0.5	0.5	
-75	75	-26.67	53.34	-53.34	26.67
75	37.5			-13.34	- 26.67

0	112.5	-26.67	53.34	-66.67	0
	-28.61	-57.22	6.66	6.66	
		3.33	-28.61		
	-1.11	-2.22	14.30	14.31	
		7.15	-1.11		
	-2.38	-4.77	0.55	0.55	
		0.27	-2.38		
	-0.09	-0.18	1.19	1.19	
0	80.31	-80.31	43.94	-43.96	0

केस संख्या–6 के परिणाम से पता चला है कि स्थिरता के कारण सपोर्ट पर आघूर्ण दोनों तरीकों से समान रहा। दोनों स्थितियों में मुक्त नमन आघूर्ण समान होगा।

5. **निष्कर्ष–** प्रस्तुत तकनीकी शीर्षक में छः केस अध्ययनों के माध्यम से तीन आघूर्ण प्रमेय व आघूर्ण वितरण विधि की पुष्टि का अनुप्रयोग किया गया और पाया गया कि गणना के आधार पर अंतिम आघूर्ण दोनों विधियों से पूर्णतः लगभग समान ही आये हैं। आघूर्ण वितरण विधि में छोटे आघूर्ण मानों को नजर अंदाज करने पर ही कुछ अन्तर आते हैं। अन्यथा परिणाम बिलकुल सही प्राप्त होते हैं। अतः लेखक ने अपने तकनीकी पेपर के माध्यम से समझाया है कि आघूर्ण ज्ञात करने के लिए दोनों विधियां प्रासंगिक हैं और वर्तमान में प्रचलित हैं।

References

1. Varshney, Manoj (2023-24) Sanrachnayon ka Vishleshan, Asian Publishers, Mujaffarnagar. ISBN: 978-93-5502-177-9
2. Varshney, Manoj (2025-26) Samagri ke Yantriki, Asian Publishers, Mujaffarnagar. ISBN: 978-93-5502-882-2.