खण्ड-13, अंक-1, वर्ष-2025, मु0प्र0 164-169
D.O.I.: https://doi.org/10.22445/avsp.v13i1.30
SJIF (2025) : 8.749

Ancient Indian Patiganita and Arithmetic Operations

Priti Bajpai
Department of Mathematics, BITS Pilani, Dubai Campus, UAE
dr.priti.bajpai@gmail.com

Received: 30-10-2025, Accepted: 26-11-2025

Abstract-It is a well known fact that in ancient India Mathematics was quite developed. The base of all mathematics was believed to be Arithmetic. Those days all calculations were done on a wooden plank called falak or pati. For big calculations it obviously had space limitations. According to Brahmgupta (628 AD), only a person who knew twenty Arithmetics operations and eight determinations was a true mathematician. In this article out of those twenty, main eight operations will be studied and we will see how they were done on a pati. It is tried to understand how they are different from European style of calculations.

Key words- Ganita, Pati, Patiganita, Arithmetic operations

प्राचीन भारत की पाटीगणिता एवं अंकगणितीय संक्रियाएँ

प्रीति बाजपेई
गणित विभाग, बिट्स पिलानी, दुबई परिसर, यू0ए0ई0
dr.priti.bajpai@gmail.com

सार– यह तो सभी जानते हैं कि प्राचीन भारत में गणित बहुत विकसित थी। संपूर्ण गणित का आधार अंकगणित को माना जाता था। उस समय सभी गणनाएँ फलक या पाटी पर की जाती थी। बड़ी गणनाओं के लिए पाटी की अपनी सीमितता थी। ब्रह्मगुप्ता (628 AD) के अनुसार बीस अंकगणितीय संक्रियाएँ (Arithmetic operations) व आठ निर्धारणों को जानने वाला सच्चा गणितज्ञ था। इस लेख में बीस में से मुख्य आठ को पाटी पर कैसे किया जाता था, यह भी समझने का प्रयास होगा कि वे यूरोपिय तरीकों से कैसे भिन्न हैं।

बीज भाब्द– गणिता, पाटी, पाटीगणिता, अंकगणितीय संक्रियाएँ

1. **परिचय**– प्राचीन भारत में सभी गणनाएँ एक लकड़ी के पट्टे यानि फलक पर पाण्डुलेखा (खड़िया, स्वेतवरनी) से लिखकर होती या पाटी पर धूलि, राख और बारीक बालू बिछाकर तर्जनी अंगुली से लिखकर की जाती और यही कारण है कि उस समय की गणित को पाटीगणिता या धूलिकरमा कहते थे। सम्पूर्ण गणना को एक ही बार पाटी पर करने के लिए जिन अंको की भूमिका समाप्त हो जाती उन्हें मिटा कर ताजे या नए अंक लिखे जाते। इस प्रकार परिणाम एक ही पंक्ति में आ जाता। यह यूरोपीय तरीके से भिन्न था, जहाँ सारी गणनाएँ लिखी जाती और यह स्वाभाविक है वो बहुत जगह लेती। पाटी पर गणना करने का तरीका बड़ा अनोखा था। हम जिन आठ संक्रियाओं को देखेंगे वह इस प्रकार हैं। (1) समकालिता (Addition), (2) व्यवकालिता (Subtraction), (3) गुणन (Multiplication), (4) भागहर (Division), (5) वर्ग (Square), (6) वर्गमूल (Squareroot), (7) घन (Cube), (8) घनमूल (Cuberoot)। बख्शाली पांडुलिपी (200 AD) से लेकर 1658 AD की पाटीसार में सभी संक्रियाओं का उल्लेख व प्रयोग देखने को मिलता है। प्राचीन भारत के गणितज्ञों के अनुसार सभी संक्रियाओं का आधार समकालिता व व्यवकालिता है व बाकी संक्रियाएँ इन्हीं के विभिन्न रूप हैं।[1,3,6]

2. समकालिता (सम + कलित) / समकन (Addition)– आर्यभट्ट II (950AD) के अनुसार

''संख्यावतां बहुनामेकीकरणं तदैव संङकलित''

यानि कई संख्याओं से एक संख्या बनाना ही समकालिता है।[5] प्राचीन काल में भारत में स्थानिक मान का प्रयोग करा जा रहा था। समकन की क्रिया दो प्रकार से की जाती थी (i) क्रम (Direct), (ii) उत्क्रम (Inverse)। जहाँ क्रम में इकाई के अंको से शुरू करते हैं वहीं उत्क्रम में बाई तरफ से। लीलावती में भास्कराचार्या कहते हैं–

''क्रमादुत्क्रमतोऽथवाऽङकयोगो यथा स्थानकमंतरं वा''

जिसका अर्थ है समकलिता या व्यवकालिता स्थान के अनुसार दाई या बाई तरफ से करना चाहिये या इसका उल्टा।[4] यदि क्रम लें तो इकाई से शुरू कर जोड़ने पर यदि मान दो अंको का है तो इकाई वाला अंक लिखकर बाकी बिंदु लगा दहाई के जोड़ में जोड़ते और स्तम्भ को मिटा देते। इस प्रकार मान एक ही पंक्ति में आ जाता। उदाहरण के तौर पर यदि 19 व 13 को जोड़ना है तो

$$\begin{array}{c} 19 \\ 13 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} 1\ \dot{2} \\ 1 \end{array} \longrightarrow 32$$

यदि 395 और 25 को क्रम में जोड़ना है तो

$$\begin{array}{c} 3\ 9\ 5 \\ 2\ 5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} 3\ 9\ \dot{0} \\ 2 \end{array} \longrightarrow 3\ \dot{2}\ 0 \longrightarrow 420$$

उत्क्रम में

$$\begin{array}{c} 3\ 9\ 5 \\ 2\ 5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} 3\ \dot{1}\ 5 \\ 5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} 4\ 1\ 5 \\ 5 \end{array} \longrightarrow 420$$

3. **व्यवकालिता (वि + अब + कलित) (Subtraction)**– आर्यभट्ट II (950AD) के अनुसार

''यदपास्तं सर्वधनात् तद्ववकलिंत तु शेषकं शेश्म''

यानि सर्वधन से किसी संख्या को निकाले तो उसे व्यवकालिता कहते हैं। बची संख्या को शेष कहते हैं। व्यवकालिता में यदि घटाया जाने वाला अंक किसी स्थान में बड़ा है, तो अगले 10 से घटाते हैं (Borrow) करना।[2] क्रम व उत्क्रम दोनो का प्रयोग प्रचलित था। यदि 465 से 274 को घटना है तो इस प्रकार किया जाता

$$\begin{array}{c} 4\ 6\ 5 \\ 2\ 7\ 4 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} 4\ 6\ 1 \\ 2\ 7 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} 3\ 9\ 1 \\ 2 \end{array} \longrightarrow 191$$

5 – 4 = 1, इकाई का स्तम्भ मिटाकर 1 लिखा। दूसरे स्तम्भ में 6, 7 से छोटा है तो 10 अगले 4 से लिया। 10 + 6 = 16, 16 – 7 = 9। अब 4 तो 3 बन गया और दूसरा स्तम्भ मिटा 9 लिखा। 3 – 2 = 1। गंगाधर के अनुसार क्रम समकालिता व उत्क्रम व्यवकालिता में ज्यादा उपयोगी है।[1]

4. **गुणन (Multiplication)**– गुणन शब्द वैदिक काल से चला आ रहा है। प्राचीन भारत में गुणन को समकालिता का ही रूप मानते थे। जितने अंक गुणक में होते उतनी बार जोड़ा जाता। इसे बख्शाली में पारसपराक्रतम कहा गया है, यानि कई बार जोड़ना। ब्रह्मगुप्ता ने चार विधियाँ दी हैं।

(i) गौमुत्रिका (ii) खण्ड (iii) भेद (iv) इस्तागुणा। वहीं श्री धराचार्या (750 AD) ने निम्न चार का उल्लेख किया है। (i) कपाटसंधि (ii) वस्था (iii) रूप विभाग (iv) स्थान विभाग। उस समय यह माना जाता था कि बुद्धिमान व्यक्ति और कई गुणन के तरीके निकाल सकता है। यहाँ हम दो तरीके देखेंगे।

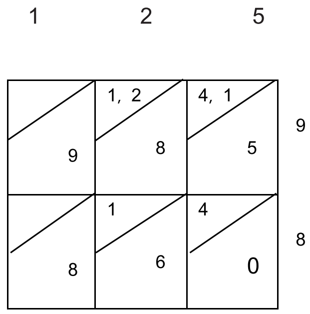
4.1 **कपाटसंधि**– यह विधि बख्शाली के समय से प्रयोग में थी। श्रीधराचार्या ने इसको करने का निम्न तरीका दिया है। उनके अनुसार गुणक को ऊपर और गुण्य को नीचे रखकर गुणा करना है। हर प्रक्रिया के बाद गुणक को खिसकाते हैं। जिन अंको का प्रयोग हो चुका उन्हें हटा दिया जाता था। यही कारण है कि गुणन को हनन, वध इत्यादि भी कहते थे।[2] आर्यभट्ट II (950 AD) के अनुसार गुणक के पहले अंक को गुण्य के आखिरी अंक के नीचे रखा जाता है। यदि 125 X 98 का मान निकालना है तो इस प्रकार करते हैं।

```
  9 8    →    9 8    →    9 8
1 2 5        1 2 5       1 2 5
-------     -------     ---------
1 2 9 0     1 4 5 0     1 2 2 5 0
```

अब इसकी गणना देखें।

5X8=40, 5X9=45, 45+4=49, 4 चढ़ाया, 2X8=16, 9+6=15, 9 को हटाकर 5 लिखा और 1 चढ़ाया, 2X9=18, 8 को 2 के नीचे लिखा 18+4+1+1=24, 4 को हटा 2 के नीचे लिखा, 2 को चढ़ाया, 1X98=98, 9+3=12

4.2 गणेशा (1545 AD) में एक आसान तरीका दिखाया है। यदि हम ऊपर वाला ही उदाहरण ले तो पहले अंको के अनुसार 3X2 की मैट्रिक्स बनाते हैं। 125 को ऊपर 98 को बगल में लिखे। हर खाने को कर्ण से विभाजित करें।



पहले 125 को 9 से गुणा किया। 9X5=45, 9X2=18, 9X1=9, 5, 8 व 9 इकाई के अंको को नीचे के त्रिकोण में लिखा और दहाई वाले ऊपर अब 125 को 8 से गुणा किया और ऊपर का तरीका अपनाया। अब तिर्यक रूप से अंको को जोड़ा। दाई तरफ से शुरू करें।

0 , 5+4+6=15 (1 ऊपर खाने में चढ़ाया)

1+4+8+1+8=22 (2 को ऊपर चढ़ाया), 2+1+9=12 जोड़ मिलता है : 12250

5. **भागहर (Division)**– भागहर प्राचीन भारत में बहुत आसान तरीके से किया जाता था। तरीका इतना सहज था कि आर्यभट्ट I ने उसका सीधे प्रयोग बिना चर्चा के किया। आर्यभट्ट II (950 AD), भास्कराचार्या (1150 AD) जैसे महान गणितज्ञों ने इस प्रकार किया है। भाजक को भाज्य के नीचे लिखा जाता फिर भाज्य के बाई ओर के अंक से शुरू करते। भाजक का सही गुणज लेकर उसे भाज्य से घटाया जाता। गुणज किनारे लिखा जाता। अगले चरण के लिये भाजक को बाई ओर खिसका देते। यही क्रिया आगे चलती। किनारे लिखे अंक मान देते। उदाहरण के तौर पर यदि 12180 को 29 से भाग देना हो तो इस प्रकार करेंगे।

12180

, 4 (121–29X4=5)

29

580

, 2 (58–29X:2=0)

29

00

, 0

29

परिणाम 420

6. **वर्ग (Square)**– वर्ग निकालने का महत्व वर्गमूल के कारण अधिक था क्योंकि वर्ग, वर्गमूल का व्युत्क्रम है। सबसे पहले वर्ग का उल्लेख ब्रह्मस्फुटा सिद्धांत में है। आर्यभट्ट I ने वर्गमूल निकाला है जो कि बताता है उन्हें वर्ग का ग्यान था। यहाँ हम श्रीधराचार्या का तरीका

देखेंगे। उनके अनुसार दी संख्या के बाई तरफ के पहले अंक का वर्ग करेंगे, इस अंक को मिटा देगें। वर्ग को ऊपर लिखेगें। अब पहले अंक के दुगने को नीचे लिखेगें। नीचे लिखे अंक से मूल संख्या के बचे अंको को गुणा करेगें। मूल संख्या के अंको को दाई ओर खिसकाया। एक प्रक्रिया पूरी हुई। अगले चरण में मूल संख्या के पहले अंक का वर्ग किया और ऊपर लिखा और दो गुना नीचे। यह प्रक्रिया तब तक चलेगी जब तक मूल संख्या के सब अंक प्रयोग में न आ जाये।[2] यदि 241 का वर्ग निकालना है तो

241 , 2 का वर्ग 4 और 2X2=4

4

241 , 4X41=164

4

564

41 41 को खिसकाया, 4 का वर्ग 16 ऊपर लिखा और 4X2=8 नीचे

580

1 8X1=8, 1 को ऊपर लिखा

8

5808

1 1 का वर्ग 1 के ऊपर लिखा

58081, यही परिणाम है। वैसे तो कई सर्वसंक्रिकाएँ भी प्रयोग होती थी। यहाँ उनका जिक्र नही करेंगे।

7. **घन (Cube)**– 5 AD से पहले भी गणितज्ञ घन निकाल रहे थे। बाद में ब्रह्मगुप्त, महावीर सभी ने अपने तरीकों का प्रयोग किया। यहाँ हम भास्कराचार्य के तरीके को समझेगें। सबसे पहले बाई ओर के पहले अंक का घन निकाला फिर उसके वर्ग को अगले अंक से गुणा किया और इसी तीन गुणा लिया। अब दूसरे अंक के वर्ग को पहले अंक से गुणा किया और इसका तीन गुना किया। आखिर में दूसरे अंक का घन लिया। यह सब जोड़ लिया। इस प्रक्रिया मे पहले दो अंको का घन मिल गया। अगले चरण में पहले दो अंको को एक मान लिया, यही प्रक्रिया चलेगी।

यदि संख्या abc है तो हम पहले चरण में $a^3+3a^2b+3b^2a+b^3$ निकाल रहे हैं। दूसरे चरण में $(ab)^3+3(ab)^2c+3(ab)c^2+c^3$ यह हमे घन देगा। यदि हमे 234 का घन निकालना है तो**:**

$2^3 = 8$, $3X2^2X3 = 36$, $3X2X3^2 = 54$, $3^3 = 27$, जोड़ने पर

```
8
3 6
  5 4
    2 7
---------
1 2 1 6 7
```

यह 23^3 है।

अगले चरण के लिये

$23^3=12167$

$3.23^2.4=6348$

$3.23.4^2=1104$

$4^3=64$

जोड़ने पर

```
1 2 1 6 7
    6 3 4 8
      1 1 0 4
            6 4
----------------
1 2 81 2 9 0 4
```

घन निकालने के लिए भी श्रेणी व सर्वसंक्रियाओं का प्रयोग होता था।

8. **वर्गमूल (Squareroot)**– वर्गमूल निकालने का अर्थ है वह अंक पता लगाना जिसका वर्ग ज्ञात हो। आर्यभट्िया में सबसे पहले इसे निकालने का तरीका देखने को मिलता है। बाद के गणितज्ञों ने करीब–करीब वही तरीका अपनाया। भास्कराचार्य ने कुछ इस प्रकार वर्गमूल निकाले हैं। सबसे पहले दी गई संख्या के अंको को इकाई से शुरू कर, सम और विषम स्थानो को ऊर्ध्व व क्षितिज–रेखाओं के चिन्हों से अंकित करते हैं। अब संख्या के सबसे पहले ऊर्ध्व चिन्ह वाले अंक से शुरू करते हैं। जो सबसे बड़ी वर्ग संख्या हो सकती है उसे उससे घटाते हैं। पहले अंक को मिटा उसकी जगह शेष संख्या लिखिते हैं। वर्गमूल को दो गुणा से भाग देते हैं। भागफल के वर्ग को संख्या के बचे अंक से घटाते हैं और उसके दुगने को पंक्ति में लिखते हैं। यही दोहराया जाता है। यदि शेषफल शून्य है तो एक प्रक्रिया खत्म हो जाती है। अंत में पंक्ति की संख्या को दो से भाग देते हैं। यदि हमें 529 का वर्गमूल निकालना हो तो–

| – | – | |
5 2 9 → 1 2 9 → 09 → 0 पंक्ति 46
4

46 / 21=23 वर्गमूल है।

9. **घनमूल (Cuberoot)**– घनमूल निकालने का तरीका सबसे पहले आर्यभट्िया में देखने को मिलता है। आर्यभट्ट I के अनुसार दाई तरफ से एक घन (ऊर्ध्व) व दो अघन (क्षितिज) के चिन्ह लगाते हैं। फिर बाई तरफ से शुरू कर पहले घन चिन्ह वाली संख्या से सबसे बड़ा घन जो संख्या से छोटा हो उसे घटाते हैं। घनमूल को पंक्ति में रख लेते हैं। ऊपर से अगला अघन अंक उतारा और शेष के साथ रखा इसे 3 x घनमूल का वर्ग इससे भाग दिया। शेषफल लिख भागफल को पंक्ति में लिखा। अब अगला अघन उतारा शेषफल के साथ रखा अब इस संख्या को 3 x पुराना भागफल x नया भागफल का वर्ग इससे भाग दिया शेषफल लिखकर घन को उतारा इस संख्या को नए भागफल के घन से भाग देते हैं। यदि शेषफल शून्य है तो एक प्रक्रिया खत्म हो जाती है। यदि 12167 का घनमूल निकालना है तो

$\bar{1}$ 2 $\bar{1}$ $\bar{6}$ 7
8
4 $\bar{1}$ $\bar{6}$ 7
5 $\bar{6}$ 7
2 7
2 7
0

घनमूल 2 को पंक्ति में रखा । 41 को 3 x घनमूल 2 के वर्ग से भाग दिया। भागफल 3 आया। अब पंक्ति 23 और शेषफल 5 है। 56 को 3 x 2 x 3 के वर्ग से भाग दिया। 27 को 3 के घन से भाग दिया। शेषफल 0 है। घनमूल 23 है ।

10. **निष्कर्ष**– यदि इन संक्रियाओं को यूरोपीय तरीके, जो आज भी प्रयोग मे है, से तुलना की जाए तो सबसे पहले यह देखने को मिलता है कि भारतीय संक्रियाएँ क्योंकि पाटी पर की जाती बहुत संक्षिप्त तरीके से होती थीं। समकालिता व व्यवकालिता क्रम व उत्क्रम दोनो तरीको से होती थी। गणना के सात से ज्यादा तरीके थे। जबकि यूरोपीय एक ही लम्बे तरीके से हो रहा था और गणना जगह लेती। भागहर को जहाँ यूरीपीय बहुत कठिन मानते वहीं भारत में वह इतने सहज तरीके से हो रहा था कि उसके नियमों का भी उल्लेख नहीं होता। यही वर्गमूल व घनमूल के साथ था। सारे हल एक ही पंक्ति में आ जाते। पर कुछ कमियाँ भी थीं। गणना के सभी संक्रियाएँ के नियम याद किये जाते थे। बहुत गणनाएँ मन में की जाती या उंगुली पर। इससे गलती होने का डर अधिक रहता था। त्रुटि होने पर हमें शुरू से करना पड़ता क्योंकि अंको को गणना में काम आने के बाद हटा दिया जाता था। कुछ भी कहें विकसित स्थानिक प्रणाली भारत से ही अरब से होती हुई यूरोप पहुँची। 1202 AD में फिबोनाची (Fibonacci) की लाइबर अबासी (Liber Abaci) ने हिन्दी–अरबी संख्या प्रणाली को यूरोप में प्रचलित किया। पर यह तो मानना पड़ेगा भारतीय पाटी गणित संक्षिप्त थी तो पढ़ने वालो के लिये आसान थी। कोई टीमटाम की आव यकता नही थी। एक पाटी या धूलि पर की जा सकती थी। दूसरा गणित का उपयोग खगोल, नक्षत्रशास्त्र, अंक ज्योतिष, धार्मिक संस्कारों, रीति सभी जगह प्रयोग होने के कारण एक हद तक सभी जानते थे।

आभार– लेखिका श्री टी0एन0 मिश्र व श्री अखिलेश वर्मा जी के सहयोग के लिए बहुत आभारी है।

References

1. Bibhutibhushan Datta, Avadesh Narayan Singh, History of Hindu Mathematics, Bharatiya Kala Prakashan, Delhi, Vol I and II, 2001, 2004.
2. K. S. Shukla, The Patiganita of Sridharacarya, Department of Mathematics and Astronomy , Lucknow University, 1959.
3. S Dwevedi, History of Mathematics, Banares, 1910.
4. Krisnaji Shankara Patwardhan, Somashekhara Amrita Naimpally, Shyam Lal Singh, Lilavati of Bhaskaracarya, Motilal Banarsidass Publishers Private Limited, Delhi.
5. K. S. Shukla, K.V Verma, Aryabhatiya of Aryabhat, India National Science, New Delhi, Vol I, 1976.
6. S. K. Bag, Mathematics in Ancient and Medieval India, Chaukhamba Orientalia, 1979.